

分數乘法結構教學設計

鄭振初

摘要

分數乘法教學的「主流」方式大都以「程序記憶」的形式出現，例如只要求學生記下分數乘法的公式 ($\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$)。這個公式只是計算過程的總結，或者是基模的表達，知道公式不一定代表理解概念。強記而缺乏深度概念，做成以後更多的學習困難。本文討論如何引入概念教學，以 ELPS(Experience, Language, Picture, Symbol) 模式，理解分數乘法的結構(分數比例除乘概念)和分數連加概念。首先學習整數乘單位分數，再引入兩個分數相乘的概念。學習過程以「結構對應概念」和「猜想引證」主導，並在兩間小學試教。學生由不同的表達形式和結構對應計算來加強分數乘法的理解。

關鍵詞: 分數乘法教學 ELPS 的教學模式

Teaching Design in Structure of Fractions Multiplication

Abstract

The “main stream” approach in teaching multiplication of fractions is “memory and procedural”, for example, students are usually taught to remember the formula of fractions multiplication ($\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$). The formula is a procedural result which is only a conclusion of a procedure or a representation of a schema. Knowing the formula does not necessary imply concept understanding. Such memorization approach without sufficient depth in concept formation resulted in further difficulties ahead in learning. This paper discusses a conceptual approach in teaching fractions multiplication, with reference to the ELPS model (Experience, Language, Picture, Symbol) and the understanding of the structure of fraction multiplications (ratio using division and multiplication) which connected with repeated fraction additions. The teaching starts with multiplication of a whole number with a unit fraction, before proceeding to multiplication of two fractions. The learning approach involves activities in “concept and structure correspondence” and “conjecturing with verification”. The teachings were conducted in two primary schools, students work with different representations to enhance their understanding of fraction multiplication through correspondence in structure and calculation.

簡介

分數乘法的計算要求較為簡單，所以有很多小學數學網站用的都是以下的「程序」教學。比方說，分數乘法有以下三個簡單步驟。第一步是上層的數字相乘(1. Multiply the top numbers (the *numerators*)，第二步是下層的數字相乘(2. Multiply the bottom numbers (the *denominators*)，第三步是簡化答案(3. Simplify the fraction if needed.)。這種不求甚解的教學，一般稱為「程序教學」學生可以不理解，但能「正確計算」。這亦解釋了為甚麼學生在以後的分數計算學習遇上更多困難。

分數概念學習的文章很多，例如分數的概念不同表達形式，分數作為比例，或者是作為分率等等。而分數乘法的討論文章和教學過程的討論則較少 (Empson, 1999, Charalambous et. al, 2007, 呂玉琴, 2005)。

參考最新的香港小學數學課程文件(2000)，在第 39 頁 5N 3 分數(四)中有以下分數乘法的描述：「1 進行分數乘法的計算，每題不超過兩步運算。2 解答簡易應用題。3 估計計算結果。」課程文件建議以上的內容共需 14 課節。課程的個描述可能太簡短，所以老師的教學大多由教科書的內容主導，包括數學內容和方向選取。如果能分析分數乘法的內容和過程，老師的教學更能收放自如。

ELPS 的教學模式

建構學習理論在 1970 年代開始受到重視，但是如何在小學數學推行建構學習，可以有很多不同形式。當中以利碧嘉(Liebeck, 1984) 的 ELPS (Experience, Language, Picture, Symbol) 學習模式最能應用在數學概念教學，所以這個模式亦較多討論和應用。ELPS 模式主要是把學習分為經驗(E)和語言(L)，這相當於連接學生的直觀概念，而語言是強化直觀概念的手段，也是連接圖象(P)的軌道，學生能由圖象操作理解概念，最後才引入整個概念的表達符號(S)。以分數乘法為例， $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ 只是最後階段的符號，這個符號是整個過程的描述而非概念自身。所以學生不能由閱讀符號而理解概念，而是要由之前的三個階段(E-L-P)連結概念。

本教材曾在兩所小學¹的小四下學期²試教，第一部份是整數和分數相乘，第二部份是兩個分數相乘。整數和分數相乘的問題再分為答案為整數和不是整數兩類。目的是讓學生能對應兩個過程，抽象所學。然後是兩個分數相乘，兩個分數相乘的智性要求是整體和分集的關係概念，計算上是除乘過程，所以小四下學期的學生應能理解兩個分數相乘的概念。

¹兩所小學分別為浸信會沙田圍呂明才小學，大角嘴天主教(海帆道)小學。在此鳴謝。

²分數乘法在香港小學數學課程是小五的範圍，選擇小四下學期教學的原因，是避免學生已經學過分數乘法。

第一部份教學題	第二部份教學題
$12 \times \frac{1}{4}$, $12 \times \frac{3}{4}$	$\frac{6}{7} \times \frac{1}{3}$, $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}$
$5 \times \frac{1}{4}$, $5 \times \frac{3}{4}$	

整數和分數相乘(ELPS 的設計)

單位分數是最簡的分數概念及形式，分數乘法概念應結合和對應單位分數的內容。目前課程在這方面投放的內容時間不足。單位分數乘法可以由 ELPS 過程引入。

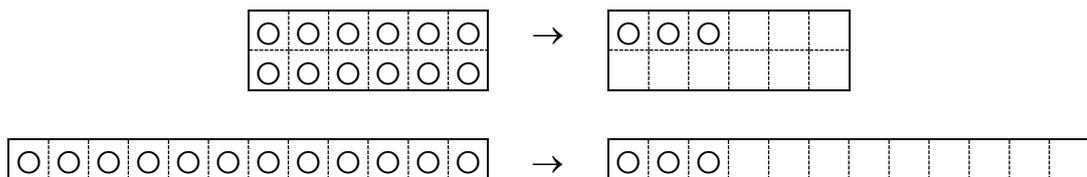
經驗(Experience) ，學生要能理解「 $A \times \frac{1}{b}$ 」是除法過程， $A \times \frac{1}{b} = A \div b$ 。

例如 12 的 $\frac{1}{4}$ ，相當於 12 均分為 4 份的其中一份，所以 12 的 $\frac{1}{4} = 3$ 。

用語上(Language)，12 的 $\frac{1}{4}$ 是 12 的 $\frac{1}{4}$ 倍，對比 12 的 2 倍是 $12 \times 2 = 24$ 。

以圖形表達時(Picture)，12 的 $\frac{1}{4}$ 為 3。而且能用多個圖形更佳。

例如以下兩個圖形都是 12 的 $\frac{1}{4}$ 為 3 的表達。



最後是以數式符號表達過程(Symbol)， $12 \times \frac{1}{4} = 3$ 。

概念轉移之一，(由除乘得「 $A \times \frac{c}{b} = A \div b \times c$ 」)

分數「 $\frac{3}{4}$ 」的概念有比例意義和除乘計算過程。學生不單要明白 $12 \times \frac{3}{4}$ 的意思，

還能對應為 $12 \div 4 \times 3$ 和用上符號 $12 \times \frac{3}{4}$ 。教學可以引用經驗上的概念轉移，由 12

的整數倍，推算 12 的分數倍。12 的 3 倍相當於 12×3 ，由這樣的概念，推算 $12 \times \frac{3}{4}$

的答案。學生理解甚麼是 3 倍。甚麼是 $\frac{3}{4}$ 倍。而且語上 12 的 $\frac{3}{4}$ 便是 12 的 $\frac{3}{4}$ 倍。

分數以集合來解釋，即是一個集的一部份，讓學生以 12 個圓形的情景來得出 12 的 $\frac{3}{4}$ 。由不同的圖形排列「2×6」和「3×4」來找出 $12 \times \frac{3}{4}$ 的數值。

在圖形階段，學生理解 $\frac{3}{4}$ 是分為 4 份，取其中 3 份，有如以下的分物過程。

以 12 個「○」為「1 單位」，以不同圖形表達相同的答案。

$12 \times \frac{3}{4}$ (圖形 1)

$12 \times \frac{3}{4}$ (圖形 2)

圖形也是操作理解，由圖形「對應」比例計算，而且所用圖形多於一個，外形不同但性質相同，學生更能理解操作過程，這是多重統一概念(multiple embodiments)的體現(Gray & Tall, 2007)。

最後是符號階段，讓學生討論運算和結果，在 12 中抽出 $\frac{3}{4}$ 代表把 12 分為 4 份，再取 3 份。以下是計算過程。

情景：
有糖 12 粒，分為 4 份。

	1 份	2 份	3 份	4 份	12 的 $\frac{3}{4}$
數式符號	$12 \div 4 \times 1$	$12 \div 4 \times 2$	$12 \div 4 \times 3$	$12 \div 4 \times 4$	$12 \div 4 \times 3$
數量結果	3	6	9	12	9

以上的 ELPS 的過程，最終目的是學生能以除乘比例得出整數乘分數。

概念轉移之二 (由除式和比例轉移為連加， $\frac{1}{b} \times A = \frac{1 \times A}{b}$)

提問和討論: $12 \times \frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{4} \times 12$ 有甚麼分別?

由學生對應情景, 例如: 「有 12 枝水, 每枝都是 $\frac{1}{4}$ 滿」, 即是共有「 $\frac{1}{4}$ 枝的 12 倍」。

另一個情景是「有 12 枝水, 每枝是全滿的, 取去其中 $\frac{1}{4}$ 」, 是「12 枝的 $\frac{1}{4}$ 倍」。

兩種概念的對應是除乘和連加。

$12 \times \frac{1}{4}$ 是分數「基本概念」, 因為除式和比例是分數的其中一個概念, 而 $\frac{1}{4} \times 12$ 是

連加運算。有 12 個 $\frac{1}{4}$, 答案也是 3。以上的問題較為容易得出答案, 因為 12 能

被 4 整除, 答案是整數, 學生能計算 $12 \times \frac{3}{4}$ 和 $12 \times \frac{1}{4}$ 。

$$12 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 12 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 12}{4} = 3。$$

下一個問題, 是整數不能被分母整除的情況, 例如 $5 \times \frac{1}{4}$,

問題: $5 \times \frac{1}{4} = ?$

由上述過程, 讓學生推導「 $5 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 」的結果。

同一概念, 可以用多於一個演示方法, 我們知道古埃及人的分數概念是基於單位分數計算的, 例如把 5 個餅分作 4 份, 會先把 4 個餅, 分為 4 份, 餘下的 1 個餅

再分為 4 分 1。相當於 $5 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 。

也可以把每個餅分為 4 份, 取 1 份, 共取了 5 次 $\frac{1}{4}$ 個餅, 即是 $\frac{5}{4}$, 這對應計算過

$$程 5 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}。$$

下一步的推想是由 $A \times \frac{1}{b} = \frac{1 \times A}{b}$, 轉移為 $A \times \frac{c}{b} = \frac{c \times A}{b}$ 。

概念轉移之三 (整數乘分數的結果「 $A \times \frac{c}{b} = \frac{c \times A}{b}$ 」)

討論數式「 $5 \times \frac{3}{4}$ 」，讓學生推導答案「 $5 \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4}$ 」。

教學討論題： 如果 $12 \times \frac{3}{4} = 12 \div 4 \times 3$ ，「 $5 \times \frac{3}{4}$ 」怎樣可以找出答案？

對這個問題，學生有以下不同的回應

回應 1	$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4}$ 。
回應 2	$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \times 3 = \frac{5 \times 3}{4}$ 。
回應 3	$5 \times \frac{3}{4} = 5 \div 4 \times 3 = 5 \times 3 \div 4 = 15 \div 4 = \frac{15}{4}$ 。

回應 1 是應用了連加的情況。

學生由連加得出「 $5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4}$ 」。

學生用圖形表達連加的結果，找出「5 的 $\frac{3}{4}$ 」。



回應 2 是把兩個數字互換，學生發現答案相同，所以認為是有效的算法。

回應 3 是除乘概念的應用，學生看出「除乘」和「乘除」後的答案是相同的。

學生討論各數式後，認同結果「 $a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b}$ 」。

教學第二部份 兩個分數相乘的教學 ($\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ 和 $\frac{a}{b} \times \frac{1}{d}$)

第一部份學生強化了分數的除乘比例性質，和讓學生以連加計算整數和分數相乘，以下是這兩個概念的結構，而兩個分數相乘的概念，是這兩個概念的結合。

分數概念(除乘比例)： 「 $a \times \frac{c}{b} = a \div b \times c$ 」	分數乘數概念(連加)： 「 $a \times \frac{c}{b} = \frac{c}{b} \times a = \frac{a \times c}{b}$ 」
---	---

第二部份教學是學生能理解和正確計算「 $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}$ 」，教學由生活問題出發，先給出以下兩條問題，讓學生選擇討論和計算哪一題。

兩個分數相乘	分數乘單位分數
做一磅蛋糕要 $\frac{6}{7}$ 杯麵粉，做一個 $\frac{2}{3}$ 磅的蛋糕要多少杯麵粉?	做一磅蛋糕要 $\frac{6}{7}$ 杯麵粉，做一個 $\frac{1}{3}$ 磅的蛋糕要多少杯麵粉?
學生對應數式: $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{7} \div 3 \times 2$ 。	學生對應數式: $\frac{6}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{7} \div 3 \times 1$ ，。

以上的情景都出現數式 $\frac{6}{7} \div 3$ ，但是「 $\frac{6}{7} \div 3$ 」很陌生，因為小四沒有學過分數除法。

教學討論題 $\frac{6}{7} \div 3 = ?$ 。

學生由圖形表達，很容易得出 $\frac{6}{7} \div 3 = \frac{2}{7}$ 。

7 格中佔 6 格，再分 3 份



所以 $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{7} \div 3 \times 2 = \frac{2}{7} \times 2 = \frac{4}{7}$ 。

學生由這個推論，一般能找出問題的答案。

做一磅蛋糕要 $\frac{6}{7}$ 杯麵粉，做一個 $\frac{2}{3}$ 磅的蛋糕要 $\frac{6}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$ 杯麵粉。

學生也能由這個答案過程找出其它分數乘法問題的答案。

例如「 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \div 3 \times 2 = \frac{1}{4} \times 2$ 」等等。為了讓學生自主學習計算，鼓勵學生自

己出題再計算。學生所出的例子有「 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ ， $\frac{9}{11} \times \frac{2}{3}$ 」，學生明白要計算 $\frac{a}{b} \times \frac{2}{3}$ 時，

假如 a 是 3 的倍數，計算會很「方便」。

不過，學生很快要發現，上述的除乘過程，會遇上新問題。例如以下的分數乘法。

教學討論題: 「 $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = ?$ 」但是 5 不能被 3 整除。

教學上老師可以先由學生應用所學解題。以下是學生的 4 個回應。

回應 1	學生認為用「擴分」解決問題最直接： $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{15}{7 \times 3} \div 3 \times 2 = \frac{5 \times 2}{7 \times 3}。$
回應 2	學生用分數的理解，「先乘後除」： $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times 2 \div 3 = \frac{10}{7} \div 3 = \frac{10}{7 \times 3}。$ 學生把除法以分數表達，最後一步「 $\frac{10}{7} \div 3 = \frac{10}{21}$ 」還是要擴分來解釋。
回應 3	學生用分數的理解，「先除後乘」： $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{5}{21} \times 2。$ 「 $\frac{5}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$ 」這一步最後仍是要用擴分的解釋。
回應 4	學生用分數的理解，「先除後乘」： 得出 $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \div 3 \times 2 = \frac{5}{7 \times 3} \times 2 = \frac{5 \times 2}{7 \times 3}。$

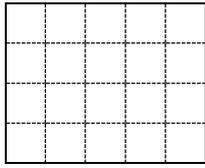
以上 4 種回應的答案都相同，只是方法不一，最後由學生討論分數相乘的簡要計算方法。無論「先乘後除」和「先除後乘」最後都用上擴分，都能夠把分數乘法表達為 $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{7 \times 3}。$

總結

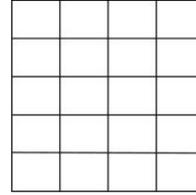
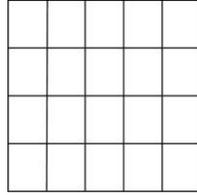
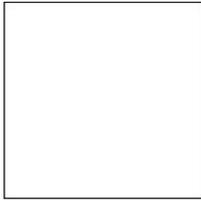
兩次的教學結果，學生都能理解分數乘法的意義。這一點可以由學生的討論過程和他們能為自擬計算題和自擬應用題得出正確答案佐證。另外，以上的學習過程是由數理分析得出答案，部份學生在算出答案之餘，仍然希望用其它方法來「驗證」。例如由不同的「1」為單位給出分數乘法的圖形。一些書本用上方格來學習

分數乘法的意義。例如 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ ，便教學生劃出一個 5×3 的長方形數格，在其中劃出 $\frac{4}{5}$ ，再在 $\frac{4}{5}$ 中劃出 $\frac{2}{3}$ 。這個過程中有兩點是要討論的。

第一點是作圖應用「長方格圖形」還是用「正方格圖形」?原則上應該是用正方格圖形，再由學生劃出 5 和 4 份。



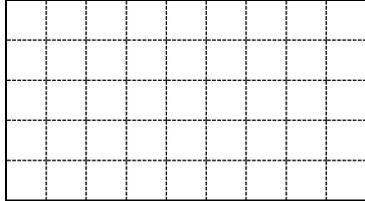
書本上定的 5×4 長方形



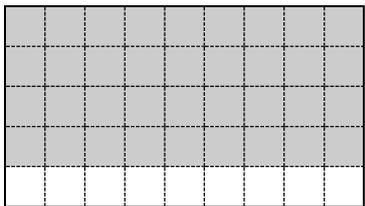
應由學生用正方形自定格數

第二點是當我們寫 $\frac{4}{5}$ ，其實是 1 的 $\frac{4}{5}$ ，這個「1」是簡略了的。在方格圖形中劃出 $\frac{4}{5}$ ，相當於在單位「1」中取出 $\frac{4}{5}$ ，「 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 」是在 $\frac{4}{5}$ 中再取出 $\frac{2}{3}$ 。即是全式為「 $1 \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 」，只是單位「1」簡略了。

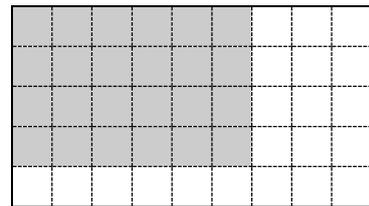
1 =



$\frac{4}{5}$

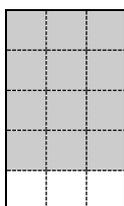


$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{24}{45}$$

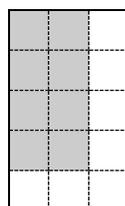


如果由學生自定方格，學生能由概念知道可以選最簡的方格數目，如下圖，長 5 格和闊 3 格，共 15 格。

$\frac{4}{5}$



$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$



以上過程，是多重統一概念(Gray & Tall, 2007)。學生在計算 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 時，能劃出5乘3的方格。這相當於是 $15 \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = 8$ ，所以 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ 。如果學生用10乘3的長方格，相當於 $30 \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = 16$ ，即是 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$ 。

小學的概念教學可以有很多不同的形式，數學的學習首重結構概念，不應只有結果的記述和計算操練。只有重視數學結構和概念對應，學生對概念理解才能更深入，並且能培養自學和解題的習慣。

參考文獻

- Charalambous, C.Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007), Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions, *Educational Studies in Mathematics* 64: 293-316.
- Empson, S. B. (1999), Equal Sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a First-Grade Classroom, *Cognition and Instruction*, 17 (3), 283-342.
- Gray, E. & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression, *Mathematics Education Research Journal* 19 (2), 23-40.
- Liebeck, P. (1984), *How Children Learn Mathematics*, a guide for parents and teachers, Penguin.

香港特別行政區政府教育局(2000)，數學課程指引(小一至小六)，2000。

陳明宏，呂玉琴(2005)，國小四年級學童分數概念之診斷教學研究，*國立臺北教育大學學報*，第18卷第2期(2005) 1-32。

http://www.mathsisfun.com/fractions_multiplication.html