解二次方程的「規矩」[1]

梁景信
香港教育學院 數學與資訊科技學系
ksleung@ied.edu.hk

引言

解實系數二次方程，一般用三類方法：（1）代數法（因式分解、配方、用求根公式），（2）圖解法（畫出二次函數的圖象），（3）數值法（二分法、Newton 法）。其實還有一個較少人知的幾何作圖法(參看[1])。此法結合數學的兩大範疇：代數與幾何，且不難學，因而十分適合高中學生學習。本文除介紹這個方法外，還用幾何法導出以下三個有關二次方程的重要結果：根和系數的關係、判別式和實根數目的關係、求根公式。

方法和原理

考慮實系數二次方程$(E): x^2+bx+c=0$，其中$bc \neq 0$。在方格紙上標出$A(0,-1)$和$B(-b,-c)$兩點，以圓規和直尺作圖，可得AB的中點O，再以O為圓心，OA為半徑作一圓(C)。若(C)與x軸相交於兩點$M(\alpha,0)$和$N(\beta,0)$，則方程(E)有兩相異實根α和β（圖 1）（不妨假設$\alpha > \beta$）；若只與x軸相切於一點$P(\gamma,0)$，則(E)有一重實根γ（圖 2）；若與x軸不相交， 則(E)沒有實根（圖 3）。圖 1－3 都是表示$c>0$的情況，讀者可自行繪畫當 $c<0$的圖象。

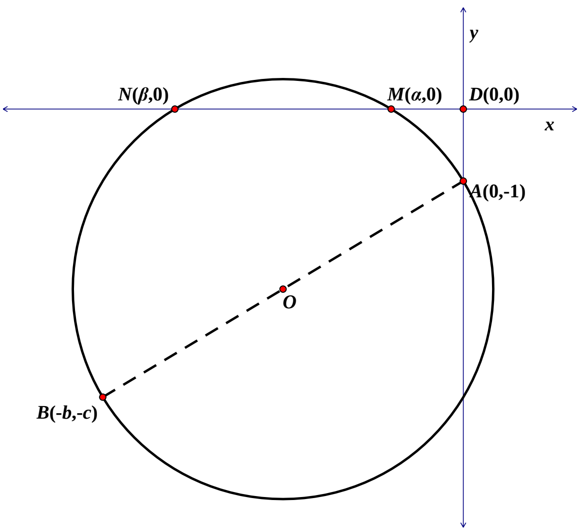

圖 1

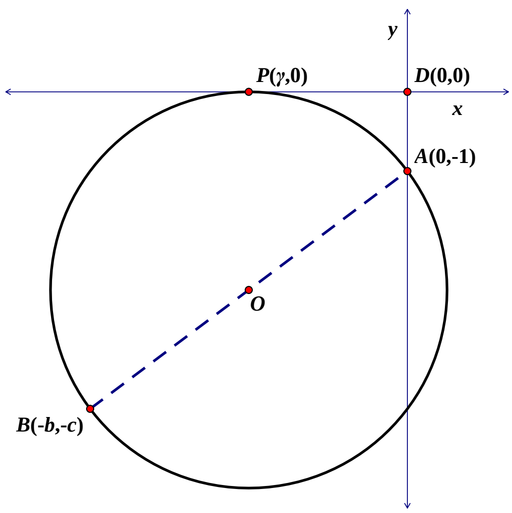

圖 2

[1]《孟子・離婁上》：「不以規矩，不能成方圓。」規是圓規，用來畫圓；矩是曲尺，用來畫直角。所以規矩本是幾何作圖工具的意思，後來引伸指法則。本文標題「規矩」一詞，也兼具這兩個意思。

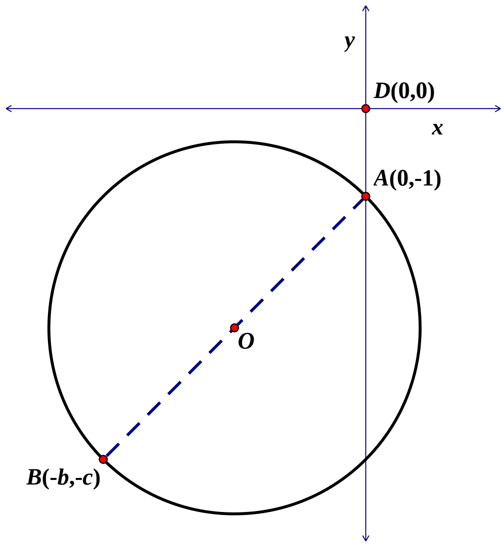

圖 3

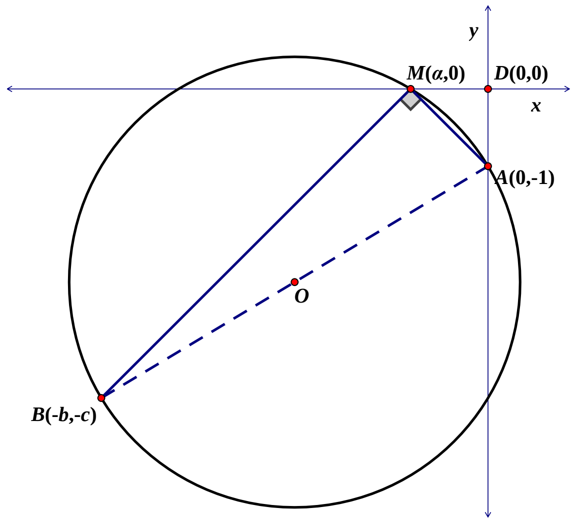

圖 4

此法原理如下：設 $M(\alpha,0)$ 為 x 軸上的一點，且 $\alpha \neq 0$， $\alpha \neq -b$（圖 4）。
M是(C)上的一點$\Leftrightarrow AM \perp BM \Leftrightarrow \dfrac{0-(-1)}{\alpha-0} \cdot \dfrac{0-(-c)}{\alpha-(-b)} = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 + b\alpha + c = 0$。

由於半圓上的圓周角是直角，我們可以更簡便地以三角尺或 T 尺來求實系數二次方程的實根，方法是要令三角尺的直角的兩條夾邊分別通過 $A(0,-1)$ 和 $B(-b,-c)$ 兩點，同時使直角落在 x 軸上（圖 5）。

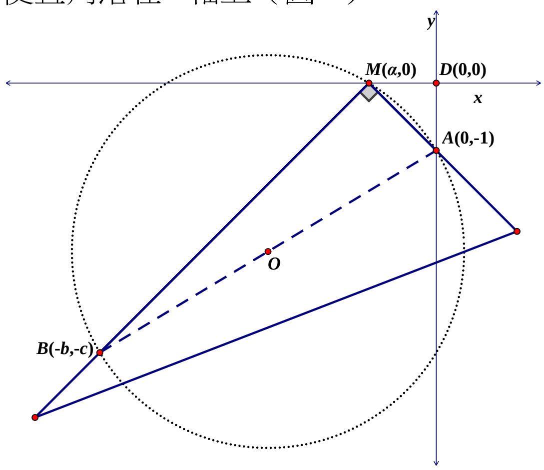

圖 5

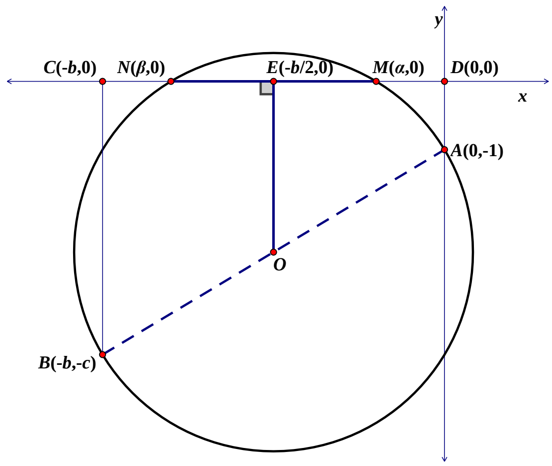

圖 6

根和系數的關係

從圓心 O 連一直線與 x 軸垂直，且與 x 軸相交於點 E ，因此 $NE = EM$ （圖 6）[2]。由截距定理可知 E 的座標是 $E(-b/2, 0)$，從而得 $(\alpha+\beta)/2 = -b/2$，即 $\alpha+\beta = -b$。

[2] 為了減省符號，線段（如 EM）和它的長度都用相同符號（即 EM）表示。

由此可得$CN = MD$，兼且$\angle NCB = \angle ADN = \angle BNA = \pi/2$，易得$\Delta ADN \sim \Delta NCB$（圖 7），因此$AD/DN = NC/CB \Rightarrow 1/\beta = \alpha/c \Rightarrow \alpha\beta = c$。

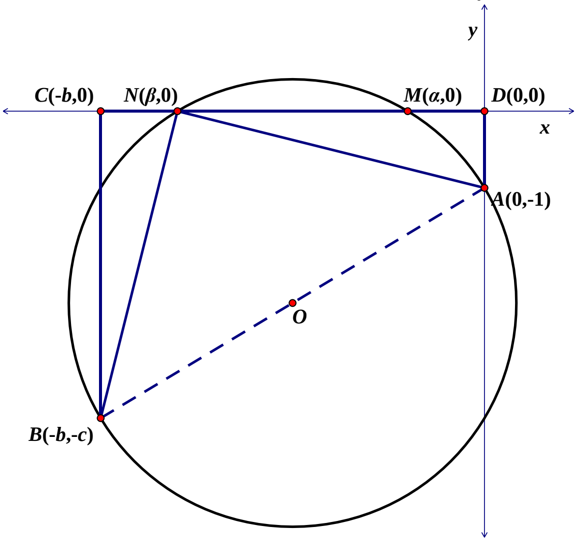

圖 7

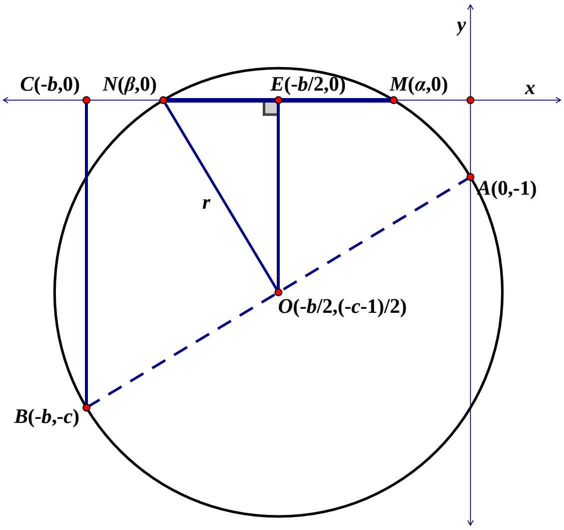

圖 8

判別式和實根數目的關係

設(C)的半徑為r，因為$r = AB/2$，所以$r = \sqrt{(c-1)^2 + b^2}/2$。若$r > OE = (c+1)/2$（圖 8），則方程$(E)$有兩相異實根；若$r = OE$，則$(E)$有一重實根（圖 2）；若$r < OE$，則$(E)$沒有實根（圖 3）。
因為$(r - OE)(r + OE) = r^2 - OE^2 = [(c-1)^2 + b^2]/2^2 - (c+1)^2/2^2 = (b^2 - 4c)/4$且$r + OE > 0$，所以：
若$b^2 - 4c > 0$，則方程(E)有兩相異實根；若$b^2 - 4c = 0$，則(E)有一重實根；若$b^2 - 4c < 0$，則(E)沒有實根。

求根公式

考慮直角三角形ΔOEN（圖 8）和利用前面的計算得$NE^2 = r^2 - OE^2 = (b^2 - 4c)/4$，並由於$NE = EM$，所以
$\alpha = -b/2 + \sqrt{b^2 - 4c}/2$，$\beta = -b/2 - \sqrt{b^2 - 4c}/2$。

討論

其實摺紙也可算是一種幾何作圖工具，用摺紙解二次方程的方法，可參看[2]。
為方便論述，我們沒有考慮$bc = 0$的情況，讀者可自行作圖來探究有關的情況。
至於求複根的幾何方法，因為較為複雜和礙於篇幅關係，故不在此介紹，留待日後另文論述。

參考文獻

[1] Dickson, L. E. (1922). *First course in the theory of equations*, p.30. New York:John-Wiley & Sons
[2] 梁景信（2009），摺紙解方程，《Datum 數學教育期刊》，第 44 期，頁 29–31。

輯於 (2011)《數學教育期刊》45，頁 95-99。