香港教育大學
小學數學教育榮譽學士課程
(五年全日制)
五年級

香港教育大學
The Education University of Hong Kong

Honours Project

姓名：顧聖濤 Gu Sheng Tao

學生編號：

導師姓名：潘建強博士 Dr. Poon Kin Keung Eric

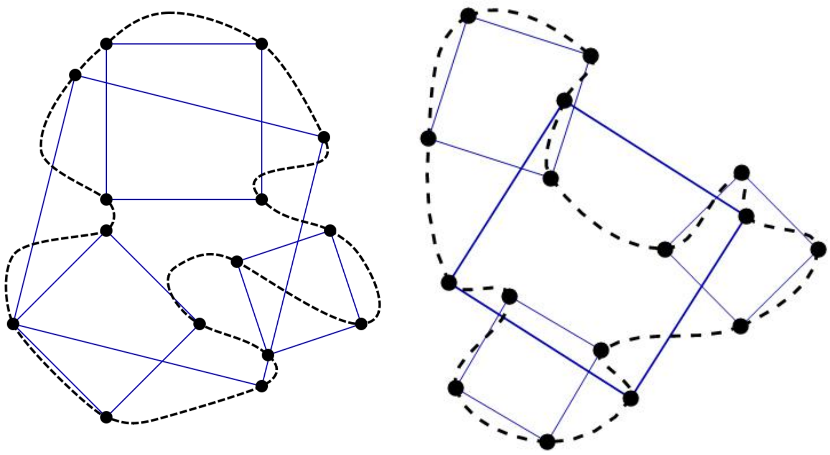
繳交日期：12/05/2017

托普利茲猜想

引言

1911 年，數學家奧托·托普利茲（Otto Toeplitz）提出了一個幾何猜想：在平面中的任意一條簡單封閉曲線上，總能找到四個點，它們恰好能構成一個正方形。這個問題又被稱為「內接正方形問題」（insribed square problem/ square peg problem）或「托普利茲猜想/問題」（Toeplitz' conjecture/ problem），這樣的曲線又稱為「若爾當曲線」。這個看似簡單的問題至今仍未被證明或推翻，不過顯然，數學家們普遍認為這個猜想是正確的。

本文將首先介紹數學家托普利茲和「托普利茲猜想」的來龍去脈，再介紹一些基本圖形的情況。然後，本文將研究凸多邊形的內接正方形。接下來，通過引入一個「登山遊戲」，來完成對於一般曲線情況下的研究。



另外，筆者發現很網上關於托普利茲本人和「托普利茲猜想」猜想的資料不多，中文版的更是難以蒐集，這些也成為了筆者撰寫本文的一大初衷，致力於對這些內容進行研究和總結，寫成一篇數學科普文章。

第一章：走進數學家托普利茲和他的問題

奧托·托普利茲

奧托·托普利茲是一位猶太人數學家，1881 年出生於德國布雷斯勞，父親和祖父都是數學教師。他的父親是個猶太人中學的校長，從兒子一出生起，唯一的願望就是把獨子培養成數學家，並且以此為目標教育孩子，最終取得成功。

托普利茲在中學時期，就對高斯、歐拉、拉格朗日、拉普拉斯、柯西和黎曼等等的數學家，以及這些數學家的成果和他們的故事，了如指掌，並且津津樂道。

托普利茲中學畢業后在布雷斯勞大學學習數學，1905 年取得代數幾何（algebraic geometry）方向的數學博士。1906 年前往數學聖地哥廷根大學。隨後，在希爾伯特的影響下，托普利茲在哥廷根的七年時間里潛心研究泛函分析（functional analysis），獲得了以他命名的托普利茲矩陣、托普利茲算子等成果。期間，托普利茲在一篇德文論文（題為Über einige Aufgaben der Analysis situs）中提出了至今懸而未決的「托普利茲猜想」。

之後，托普利茲於 1913 年前往基爾大學任教，1920 年成為正教授。1928 年起任教於波恩大學。直至 1935 年，受到納粹迫害被驅逐，於 1939 年前往耶路撒冷伯來大學，任職校長科學顧問。不幸的是，1940 年，托普利茲在耶路撒冷死於肺結核。

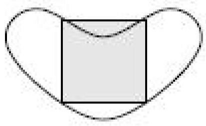
托普利茲在人生最後的 10 十年左右時間內，對研究數學史和數學思想愈來愈感興趣。提倡使用所謂的「發生法」（genetic method）來教學，闡明古希臘的數學思想如何引導發展成現代數學的一些基本概念。

托普利茲另一個值得一提的事情是，與摯友漢斯·拉德梅徹（Hans Rademacher）一起撰寫的科普數學讀物，《數學欣賞》一書，影響深遠，啟蒙了一代數學家，甚至包括沃爾夫數學獎得主阿诺德（V. I. Arnold）、拉克斯（PeterLax）、格罗莫夫（MikhailGromov）等等。《數學欣賞》原書為德文，1933 年出版，標題為《論數與形》(VonZahlen und Figuren)，英文譯為 The Enjoyment of Math，中譯以此取名數學欣賞。

托普利茲猜想的歷史

1911 年，托普利茲在一次論文會議中，對於自己德文原題為Über einige Aufgaben der Analysis situs 的數學論文進行了報告，並在第二部分的最後，提出了兩個拓撲學上的問題，其中一個便是：在平面中的任意一條簡單封閉曲線上，總能找到四個點，它們恰好能構成一個正方形（Toeplitz，1911）。問題的陳述十分簡潔明了，後來該問題被稱為「內接正方形問題」或「托普利茲猜想/問題」。恐怕他本人也未曾料到，時至今日，這個看似簡單的問題仍未有一個完美的解答，魂牽夢引般地困擾了數學界一百多年。

當時托普利茲只嘗試研究了凸封閉曲線的情況，給出了一些結果。[1]顯而易見的，在凸封閉曲線的情況下，正方形的所有部分都會在該封閉曲線的內部，而事實上正方形並不需要完全在封閉曲線的內部，如下圖（本文為了表述的簡潔，將如圖凹封閉曲線的情況也統稱為「內接正方形」）：



在實際證明的過程中，凹封閉曲線的情況會遠比凸封閉曲線的情況困難的多。另外，相當有趣的是，托普利茲本人在 1911 年提出問題的這篇論文之後，托普利茲本人便再也沒有公開發表過任何有關研究「托普利茲猜想」的論文（Benjamin，2014）。換句話說，托普利茲在提出問題后便撒手不管了。

「托普利茲猜想」早期的重要結果主要由數學家 Arnold Emch 和給出（Benjamin，2014）。早在 1913 年，Arnold Emch 便給出了一個對於「足夠光滑」[2]的凸封閉曲線的證明。2 年後他在第二篇論文中又給出了一個更弱條件的「足夠光滑」的證明。1916 年，Arnold Emch 在第三篇論文給出了一個及其重要的證明，他證明了分段解析曲線（ piecewise analytic curves）[3]組成的封閉曲線總存在內接正方形。Emch 在他的第二篇論文中就聲稱他研究該問題的靈感並非來自於托普利茲，而是他的朋友 Aubrey J. Kempner，一位英國數學家。當然，現在數學界上仍然普遍地將問題的提出歸功於托普利茲，認為托普利茲是第一個正式開始研究這個問題的數學家，這個問題常被稱為「托普利茲猜想/問題」就是最好的證明。

Lev Schnirelman

而 Lev Schnirelmann（1905-1938）是一位短命的蘇聯數學家，他從 1929 年開始發表了不少研究「內接正方形問題」的論文，極大地推動了問題的研究。在他之後，又有許多數學家給出了推動問題的不同證明。

最新的研究成果主要有下面兩個：Stromquist Walter 於 1989 年證明了每個「局部單調」[4]（local monotone）的曲線總有內接正方形（Stromquist， 1989）。Mark Nielsen 和 Wright 於 1995 年證明任意中心對稱圖形都有內接正方形[5]。他們還證明了一些其他特殊

[1] 對於簡單封閉曲線的凹凸性有很多種定義方法。一般來說，對於一個簡單封閉曲線 F，對於 F 圍成的空間內任意兩個點 A、B，若線段 AB 上的所有點都在 F 圍成的空間內，則該圖形為凸封閉曲線，反之則為凹封閉曲線。

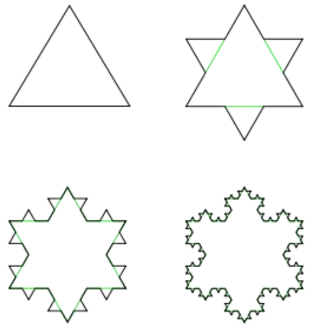
[2]詳見補充一

[3]詳見補充一

[4]詳見補充一

[5]詳見補充二

的對稱情況，包括雪花曲線（又稱科赫曲線，連續而處處不可微，如下圖）（Nielsen&Wright，1995）。



就連大名鼎鼎的天才數學家陶哲軒（Terence Tao）也對這個問題保持着興趣。2016 年的 11 月 22 日，他就在個人博客上發表了一篇（Tao，2016）題為 An integration approach to the Toeplitz square peg problem 的文章，試圖使用積分的方法來研究托普利茲問題。

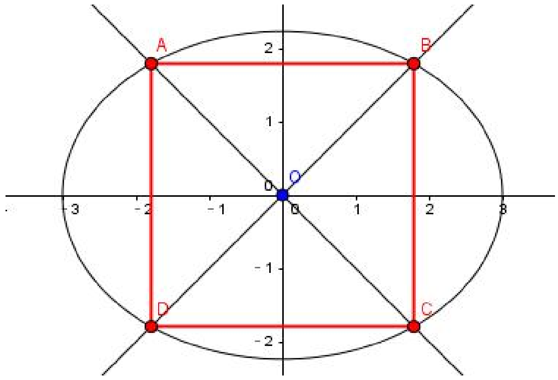
然而，春去秋來，100 多年的歲月匆匆過去了，時至今日，托普利茲提出的「內接正方形問題」問題，仍未得到一個令人滿意的解答。這個猜想最終將會走向何方？就只有留給時間來解答了。

第二章：托普利茲猜想的簡單情況

讓我們來回到問題本身：在平面中的任意一條簡單封閉曲線上，總能找到四個點，它們恰好能構成一個正方形。我們首先來研究一下一些簡單的情況。

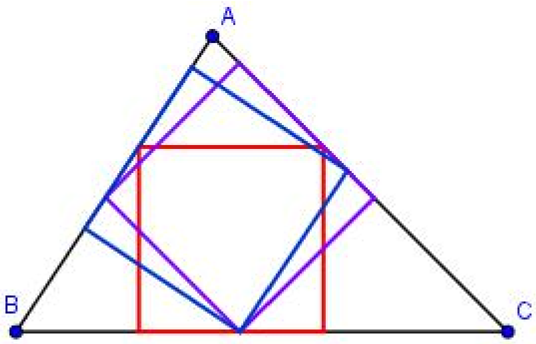
首先，圓有無限個內接正方形，圓的任意兩條互相垂直的直徑就是一個正方形的對角線。

橢圓有且僅有一個內接正方形。顯然橢圓和內接正方形的中心重合，否則內接正方形的對角線不可能互相垂直平分。以橢圓的中心 O 為原點建立平面直角坐標系，如下圖，橢圓和象限平分線（y=x 和 y=-x）交於四點，這四個點即構成橢圓內接正方形。（很多具有對稱性質的圖形，皆可以用類似的方法得到內接正方形）

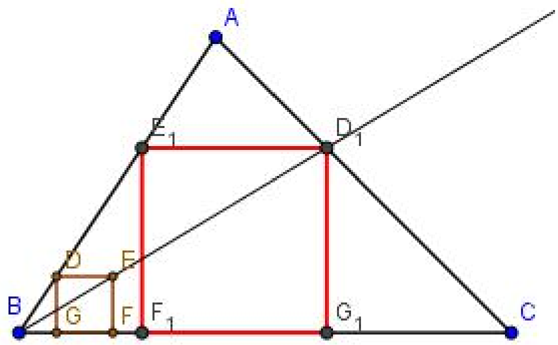


在多邊形中，對於三角形而言，由於三角形只有三條邊，那麼內接正方形的四個頂點，勢必有有兩個落在同一條邊上。

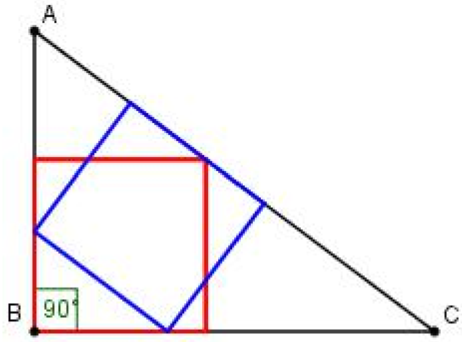
對於銳角三角形，有三個內接正方形，如下圖，銳角△ABC 每一條邊都對應了一個內接正方形（用不同顏色表示）。



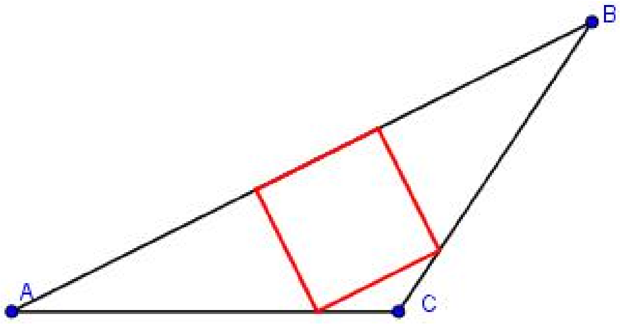
利用相似的原理，這樣的正方形可以很快得到，先在一條邊上作小正方形 DEFG，大正方形的頂點 D_1 必定是 AC 和射線 BE 的交點。如下圖：



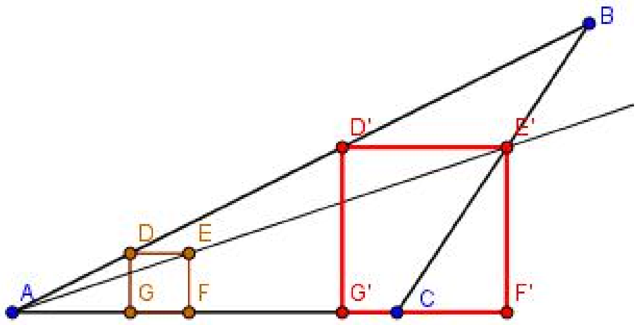
而在直角三角形中，內接正方形只有 2 個，一種是正方形的一條邊落在斜邊上，另一種是正方形的兩條邊落下兩條直角邊上，如下圖：



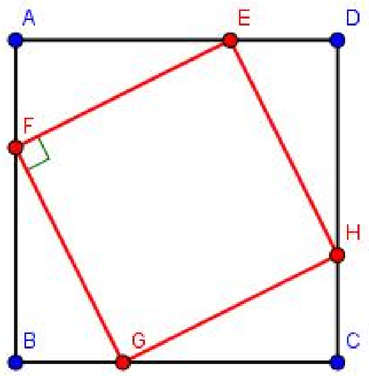
鈍角三角形的內接正方形有且僅有一個，即正方形的一邊落在最長邊（鈍角所對的邊）上。如下圖：



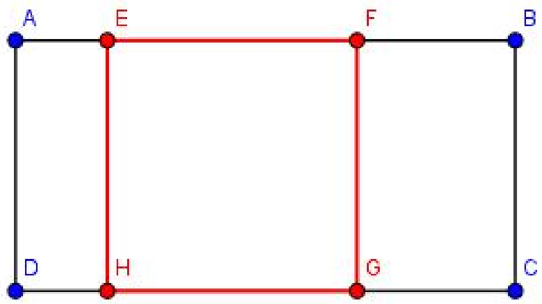
顯然，如果正方形的一邊要落在其他邊上，F'將在 AC 延長線上，這樣不存在內接正方形。



正方形有無數個內接正方。如下圖，大正方形 ABCD，只要滿足 |AE|=|BF|=|CG|=|DH|，就可以獲得內接正方形 EFGH。

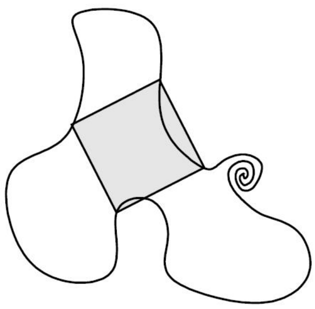


長方形也有無數個內接正方形，如下圖，利用長方形的平行線，只要有較長邊 AB 上的線段|EF|=|AD|即可。



另外，平行四邊形、菱形、梯形、箏形等規則圖形，都可以利用對稱或平行線的特性找出內接正方形，讀者們可以自行思考，在此不做贅述。

那麼，上述常見圖形的情況都容易找到內接正方形，但是對於更複雜的情況呢？對於一些沒有規則的曲線呢？



第三章：凸多邊形的內接正方形

從菱形出發

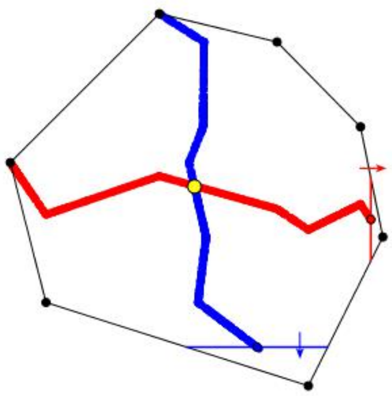
在我們的證明過程中，我們會先證明曲線存在內接菱形，再考慮內接正方形的情況。文章會在初等數學的範疇內，用「直觀」的方法，來由簡到繁地層層遞進。首先，我們將會先證明，任意凸多邊形都存在內接菱形，筆者將會介紹兩種證明方法。

方法一：

考慮一個任意凸多邊形，如下圖，不妨考慮一條水平的直線由上至下掃過，和凸多邊形交點的中点所經過的軌跡就是一條連接凸多邊形最頂端與最底端的折線段（藍色軌跡）。

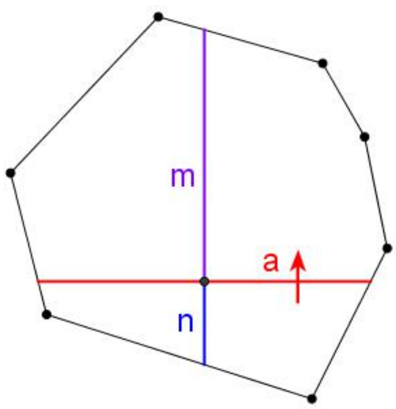
類似地，再考慮一條豎直的直線由左至右掃過，和凸多邊形交點的中點所經過的軌跡就是一條連接凸多邊形最左端與最右端的折線段（紅色軌跡）。

顯然，兩條軌跡必然會有一個交點，交點的時刻便是兩條線段互相垂直且平分，四個點便構成了一個菱形。[6]



方法二：

類似的，考慮一個任意凸多邊形，如下圖，不妨考慮一條水平的直線由下至上掃過，直線和多邊形兩個交點構成線段 a（紅色線段）。作 a 的垂直平分線可以獲得 m 和 n 兩條位於 a 兩側的線段。a 由下至上的移動過程中，n 經歷了從無到有的遞增過程，m 經歷了從有到無的遞減過程，所以該過程中恰好經歷了一次 m=n，此時兩條線段互相垂直且平分，四個端點便構成了一個菱形。[7]



[6] 參見 Geogebra「方法一動畫 1」和「方法一動畫 2」，動畫 1 中展示了內接菱形，動畫二中多邊形可以變化。
[7] 參見 Geogebra「方法二動畫」

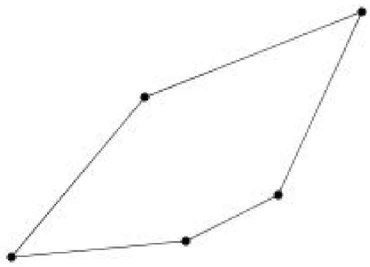
這個過程也可以使用函數圖像來解釋[8]，會更加利於理解。另外，凸多邊形存在內接正方形，運用拓撲學中的不動點定理也可以簡單快速地予以證明[9]。這些都在此不做贅述。

一些補充：

本文為了證明的簡潔性和美觀性，省去了一些不重要的內容，現在在此進行補充，讓證明更加詳細完備。

我們都不妨只考慮了水平和垂直線段掃過凸多邊形的情況。事實上，由於圖形是可以旋轉的，這樣是不失一般性的。

還有一種特殊情況，即圖形的最頂端或者最低端，和最左端或者最右端是同一點，例如下圖。此時方法一會遇到問難，但是這也並不影響我們的證明結果。



另外，本文的證明是一種「直觀證明」，意圖通過直觀形象的簡單證明，讓讀者們可以輕鬆地理解和接受，了解問題，開拓思維。誠然，這並不是嚴格意義上的數學證明，相比於嚴謹的證明，這也是遠遠不夠的。

所以，在本文中，也使用了「軌跡」和「掃過」這樣的詞眼。在數學家們的證明之中，掃過的過程，就是直線的集合和圖形取交集的過程，軌跡便是點的集合，交點即是交集。嚴謹的證明會運用集合的概念來進行。

巧用旋轉——從菱形到正方形

在之前的證明中，我實際上已經證明了，對於任意凸多邊形，任選一個方向，都存在一個菱形，使之其中一條對角線和 平行。

當選取方向為 時，兩條對角線的長度分別記為 x 和 y。旋轉方向，當旋轉 90° 之後，兩條對角線互換了，即兩條對角線互換了長度。所以，在旋轉 90°的過程

[8]詳見補充三
[9]詳見補充四

中，一條對角線經歷了由 x 到 y 的過程，另一條對角線經歷了由 y 到 x 的過程，所以在旋轉過程中一定至少有一個時刻，兩條對角線長度相等。此時我們的到了內接正方形。（Emch，1916）（顧森，2012）[10]

我們也可以理解為，兩條對角線的差值經歷了變號的過程，故一定至少有一個時刻，兩條對角線的差值為 0，即得到了內接正方形。這樣的過程也可以使用函數圖像來解釋[11]。

任意凸封閉曲線

我們已經證明了任意凸多邊形都存在內接正方形了，即「托普利茲猜想」對於任意凸多邊形都成立。事實上，我們上述的證明方法可以一樣地推廣到凸封閉曲線，只不過中點的軌跡從一條折線段變成了連續的曲線而已。因此，「托普利茲猜想」對於任意凸封閉曲線對於任意凸封閉曲線都成立。

當然，如果曲線是凹的，那麼情況就截然不同了，在直線掃過曲線的過程中，它們可能會產生不止兩個交點。

第四章：任意曲線的內接正方形

登山遊戲

接下來，為了我們的證明作鋪墊，我們來假設如下的情況：A 和 B 都是登山愛好者，他們相約去爬山。他們想要：

1. 同時從山腳（海拔最低點）出發，同時到達山頂（海拔最高點），
2. 走兩條不同的路線，
3. 保證登山的過程中時時刻刻保持海拔相同。
4. 由於山路是崎嶇的，他們有時候會走下坡路。他們為了保持海拔一致，一方可以為了照顧對方走回頭路。

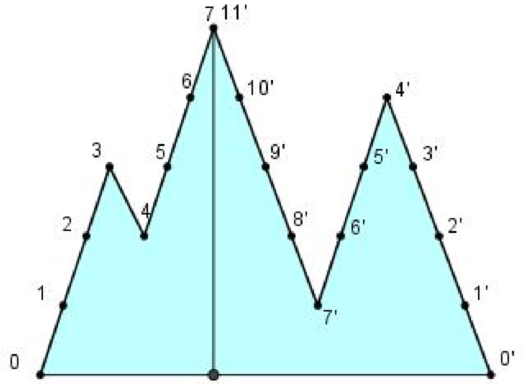
那麼，不管山路如何，這樣浪漫的想法可以實現嗎？

---

[10]參見 Geogebra「巧用旋轉——從菱形到正方形」，動畫為一個五邊形的情況，在旋轉到 34°和 35°之間存在內接正方形。

[11]詳見補充五

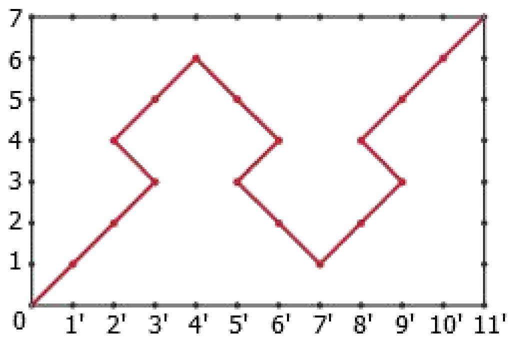
我們來簡化一下問題，先來看一個簡單的折線段情況，來幫助我們理解。我們可以來看下圖的山峰，A 從左側山腳 0 向上爬，B 從右側山腳 0′向上爬，走不同的路徑，最後相聚于山頂 7-11′。



由於登山的過程中，一方可以為了照顧另一方而走回頭路。那麼這意味着，在某一方到達一個小山峰或小山谷（即極值點，如 3，4，4′），一方為了繼續前行，那麼此時另一方會為了對方而走回頭路。這樣下去，我們就會發現這個登山遊戲是可以完成的，登山的過程如下（顧森，2012）：

0 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 5 → 4 → 3 → 2 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7
0'→ 1'→ 2'→ 3'→ 2'→ 3'→ 4'→ 5'→ 6'→ 5'→ 6'→ 7'→ 8'→ 9'→ 8'→ 9'→ 10'→ 11'

我們以左側登山者 A 的位置為縱軸，以右側登山則 B 的位置為橫軸，將所有海拔高度一樣的點標註在坐標軸上，會發現它們恰好是一條連續的曲線，從起點（0′，0）到終點（11′，7），這樣的曲線是一定可以作到的。而這樣的曲線正是 A 和 B 完成遊戲的登山過程。[12]

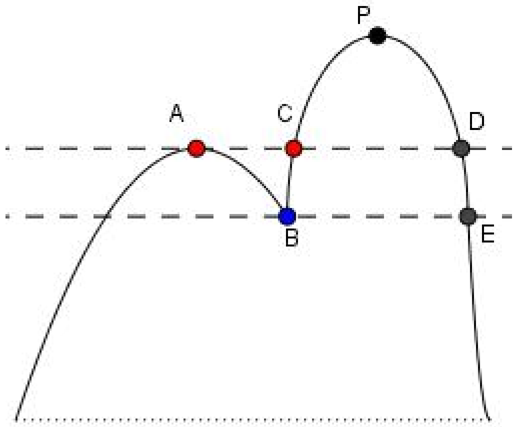


在接下來的例子中，山路將會變得更加崎嶇，不一定是直線，而是一般的曲線了，那麼 A 和 B 的登山遊戲仍可以完成嗎？

那麼我們不妨先來看看下圖的簡單例子，這次爬山的路線變成了不規則的曲線。顯然，我們需要關心的只是 A 和 B 在登山的過程中，有沒有下坡路，即有沒有小山峰和小山谷（即極大值點和極小值點）。A 是一個山峰（極大值點），C

[12] 一些簡單的特殊情況，不影響登山遊戲的完成，詳見補充六

和 D 都是和 A 同海拔的點。B 是一個山谷，E 是和 B 同海拔的點。在 A 爬向 C 的過程中，AB 段右側登山者便會為了照顧對方從 D 走回 E，之後兩人再一起向上爬。所以顯然我們發現，其實直線和曲線不影響登山遊戲的完成。

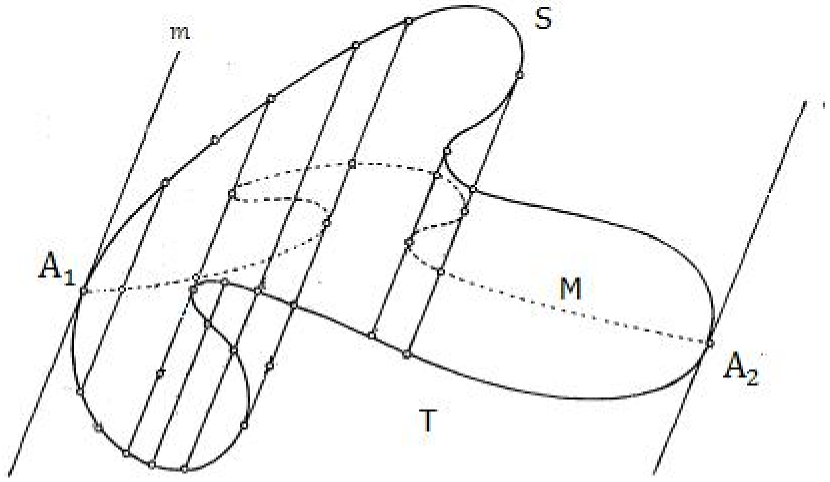


類似地我們將所有海拔高度一樣的點標註在坐標軸上。我們將登山時間記為 t，考慮左側登山者 A 所處實時位置的海拔高度記為，右側登山者 B 所處實時位置的海拔高度記為，考慮坐標軸上 t 相同的點（，）的集合 C。在坐標軸上，我們發現 C 構成一條連接原點（0,0）和 P（山的最高點）的一條連續曲線。因為 A 和 B 登山的過程是連續的，而這條曲線就是滿足遊戲規則的登山方法。[13]

一般的簡單封閉曲線的情況

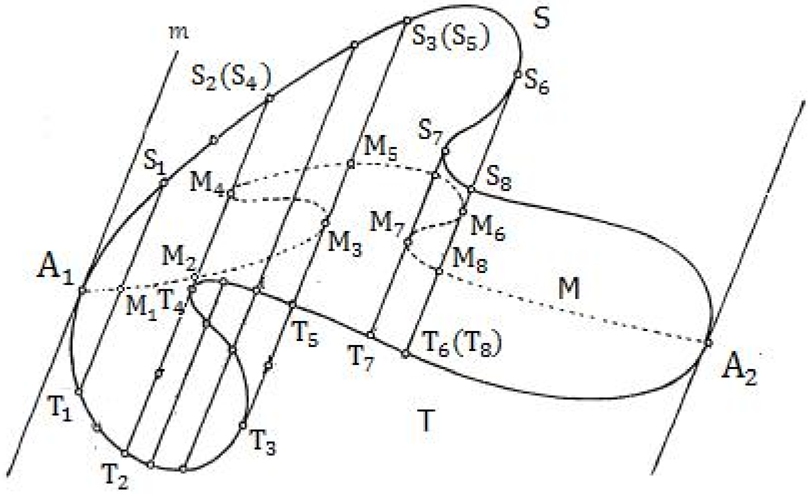
接下來，我們來考慮對於一般簡單封閉曲線的情況（可能是凹的）。
給定一條任意的簡單封閉曲線 C，那麼假設有一條任意 方向的直線ℓ，掃過曲線 C。最開始的切點記為 A_1，此時的切線記為 m，最後的切點為 A_2（A_1、A_2 可能為頂點或者為線段上一點），如下圖。

[13] 具體可以通過不動點定理證明，實際上是布勞爾不動點定理的一維情況。



接下來，我們考慮這樣一個登山遊戲，兩個人同時從 A_1 出發， 爬向 A_2，選擇從 A_1 兩側的不同方向出發，走不同的路徑。登山過程中兩人距離 m 的距離，即為海拔高度，兩個人從 A_1 到 A_2 要滿足登山遊戲的規則，即時刻處於同一海拔。我們將一側登山者的路徑記為 S，另一側記為 T，登山過程中兩人的中點的路徑記為 M（是一條連續的曲線）。之前我們便說過，這樣的登山遊戲是可以做到的。

如下圖，我們考慮點 $S_i \in S$，$T_i \in T$，$M_i \in M$，i 相同便代表了同一時刻，如下圖，兩人走不同的路徑，同時從 A_1 出發， 再從 S_1 到 S_8 和 T_1 到 T_8，同時到達 A_2 的過程。兩人的中點也經歷了從 A_1 出發， 再從 M_1 到 M_8，到達達 A_2 的過程。具體行走的過程，兩人如何在極值點為了照顧對方而走回頭路，筆者在此不做贅述。最終，M 便是我們想要的，連接 A_1A_2 的一條連續曲線。



另外，如果選定任意 方向的直線ℓ，掃過曲線 C 時，如果起始或最終交點不止一個（多個點或者線段）[14]，那麼任取其中一點作為起點或終點都可以完成登山遊戲。Emch 證明分段解析曲線圍成的封閉曲線總存在內接正方形時，便以此進行分類討論（Emch， 1916）。

接下來，我們再來仿照之前的做法，考慮垂直於 方向的 ，選取直線 n'∥，n' 掃過曲線 C，起點和終點的切線分別為 n 和 n'。同樣的，我們可以完成一個登山遊戲，從而獲得中點軌跡 N。不難看出，在 m、n、m' 和 n' 四條直線圍成的矩形範圍內，M 和 N 必有交點。交點便對應了一個內接菱形。

故技重施，任意方向 ，我們獲得了內接菱形。旋轉方向 ，當旋轉了 90°之後，菱形的兩條對角線互換了位置，即兩條對角線互換了長度。在旋轉 90°的過程中，一條對角線經歷了由 x 到 y 的過程，另一條對角線經歷了由 y 到 x 的過程，這個過程是連續的，所以在旋轉過程中一定至少有一個時刻，兩條對角線長度相等。此時我們的到了內接正方形。（我們也可以理解為，兩條對角線的差值經歷了變號的過程，故一定至少有一個時刻，兩條對角線的差值為 0，即得到了內接正方形。）

誠然，如之前所說，這樣的證明僅僅是「直觀證明」。

結語

自托普利茲提出問題也已過了一百個年頭，雖然並比不上一些大名鼎鼎的數學猜想那般聞名天下，但毋庸置疑的是，關於這個問題仍困擾着數學界，問題的研究也仍在繼續。希望在不遠的將來，「托普利茲猜想」能獲得圓滿的解決。對於這「托普利茲猜想」進行一定程度上的研究和積極推廣也是筆者撰寫本文的初衷。

另外，在本文的最後，由衷地感謝香港教育大學數學系潘建強博士介紹給筆者這一問題。

[14] 詳見補充七

補充一：

在數學分析中：若函数本身连续，記为 C^0 函数；若函数的導函數連續，記為 C^1 函数；若函数的 n 階導函數連續，記為 C^n 函数。光滑（smooth）是指函数的任意階導函數連續，記為 C^∞。「足夠光滑」便是比「光滑」更弱的條件限制。

解析（analytic）可以簡單理解成，曲線可以表示成函數 f（x），可以通過泰勒公式表示，是無窮可微的。解析的條件強弱介乎 C^1 和 C^0 之間。

這些概念在實分析和複分析中稍許有所不同，但極為相似。「局部單調」（local monotone）中可以簡單理解為曲線上的每一個點的兩個方向都是單調的。「局部單調」包含了分段 C^1 曲線的情況，但是這個 C^1 曲線必須不存在「尖點」（cusps）。

托普利茲猜想早期的研究過程就是不斷地從 C^∞ 逼向 C^0 的過程，即是使 C^n 的 n 不斷減小，因為只要證明了 C^0 的情況，就證明了托普利茲猜想本身。蘇聯數學家 Lev Schnirelmann 的研究就是這樣，他最終止步於比 C2 條件稍強的情況（Benjamin，2014）。

另外，「托普利茲猜想」在歷史上還出現過其他的等價證明方法。其中一個比較有成果的將問題轉化成了內接特殊的等腰梯形，這樣的等腰梯形特征是有三條邊相等，且均大於第四條邊。如果一條簡單封閉曲線不存在或者有偶數個這樣的內接等腰梯形，那麼它就有內接正方形。（Benjamin，2014）

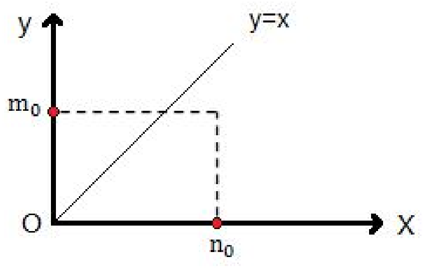
補充二：

對於中心對稱圖形來說，直觀地來看很容易理解。將圖形放在以對稱中心為原點的坐標系內，圖形必然會和第一象限的角平分線（y=x）有交點。將交點通過軸對稱就可以獲得正方形的四個頂點。

當然，這樣的說明對於嚴謹的數學證明來說是遠遠不夠的。

補充三：

這個過程也可以使用函數圖像來解釋，更加簡潔易懂。將 n 的長度設為 x，將 m 的長度設為 y。在 a 由下至上的移動過程中，y=f(x)的函數圖像便是從 m_0 到 n_0 的遞減曲線。顯然，f(x)與函數 y=x 必有交點。此時便對應內接菱形。（交點的存在本質是其實也是補充四中布勞威爾不動點定理）



補充四：

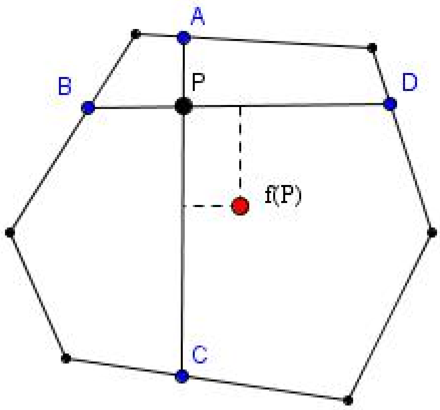
布勞威爾不動點定理

在講述第三種方法之前，筆者先來介紹拓撲學里的一個非常重要的基礎定理——布勞威爾不動點定理。不動點定理由荷蘭數學家布勞威爾於 1911 年證明，布勞威爾不動點定理說明：對於一個拓撲空間中滿足一定條件的連續函數 f，存在一個點 x_0，使得 $f(x_0) = x_0$。

我們在處理不同的方程時，包括代數方程、函數方程、微分方程等等，經常能把方程改寫成 f(x)=x 的形狀，這裡 x 是某個適當的空間 X 中的點，x 的定義域就是點集，f 是從 X 到 X 的一個映射或運動，把每一點 x 移到點 f(x)。方程 f(x)=x 的解 x_0 恰好就是在 f 這個運動之下被留在原地不動的點，故稱不動點。值得一提的是，不動點定理在泛函分析尤為重要，也在托普利茲猜想中有不少應用，也就不難理解為什麼托普利茲會提出這樣一個問題了。

方法三（顧森，2012）：

接下來，我們同樣來考慮一個任意的凸多邊形，P 是凸多邊形內任意一點，過 P 作兩條互相垂直的直線，與凸多邊形交於 A、B、C、D 四點。用 f（P）表示 ABCD 四點的重心（即線段 AC 的中垂線和線段 BD 的中垂線的交點）。由於圖形是凸的，f（P）一定位於凸多邊形的內部，且容易看出 f（P）是連續的。那麼我們便可以應用不動點定理，由不動點定理可知，存在一個點 P 使得 P= f（P），此時 AC 和 BD 互相垂直且平分，四邊形 ABCD 為菱形。



補充五：

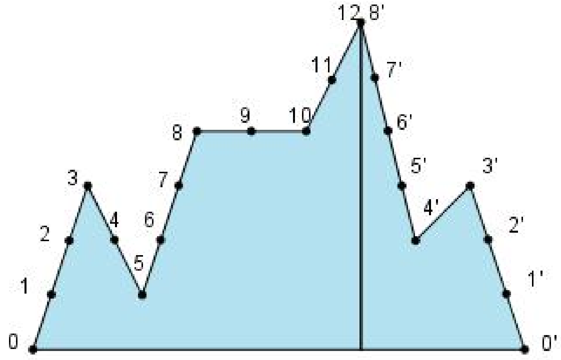
和補充三類似，同樣地，我們可以使用函數圖像來解釋。可以不妨設 m＞n。一條對角線的長度記為 y=f(θ)，另一條記為 z=h(θ)，θ為 旋轉的過的角度。y=f(θ)是經過（0，m）和（，n）的連續函數，z=h(θ)是經過（0，n）和（，m）的連續曲線。在函數圖像上一目了然，f(θ)和 h(θ)在θ∈（0，）內必有交點，即存在內接正方形。

同樣，也可以理解為，兩條對角線的差值為函數 y=f(θ)，θ為 旋轉的過的角度，y=f(θ)是經過（0，m－n），（，n－m）的連續函數。顯然，在函數圖像上，f(θ)與 x 軸必有交點，即存在內接正方形。

（交點的存在本質其實也是是布勞威爾不動點定理）

補充六：

當爬山的路徑中出現水平直線時（即在走平路，海拔不變），登山遊戲同樣可以完成。如下圖，

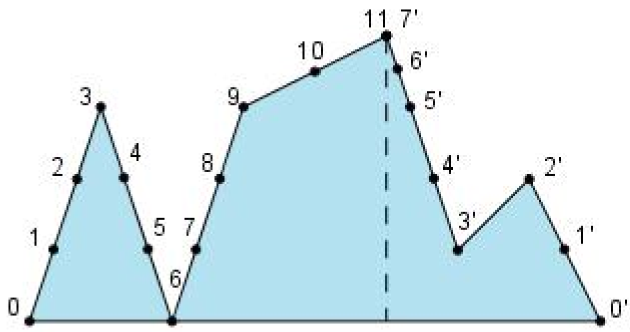


只需要 A 在從 8 走向 10 的過程中，B 為了照顧 A 停留在原地 6′處即可。所以出現平路不會影響（這一點對於曲線也成立），完成登山過程的兩人路徑為：

0 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11 → 12
0'→ 1'→ 2'→ 3'→ 2'→ 1'→ 2'→ 3'→ 4'→ 5'→ 6'→ 6'→ 6' → 7' → 8'

將所有海拔高度一樣的點標註在坐標軸上，會發現同樣地，踏們能形成了一條從起點（0′， 0）到終點（11′，8）連續的曲線，只是會出現水平或豎直的線段而已。

另外，當出現登山過程中出現海拔最低點的情況，也並不影響登山遊戲的完成，另一方只要退回起點便可。如下圖，

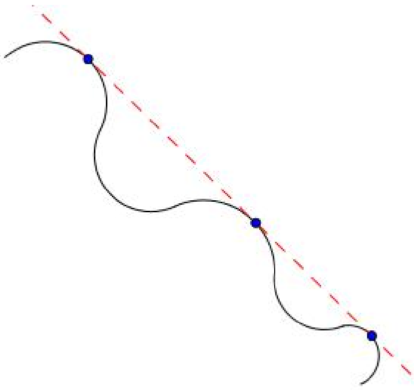


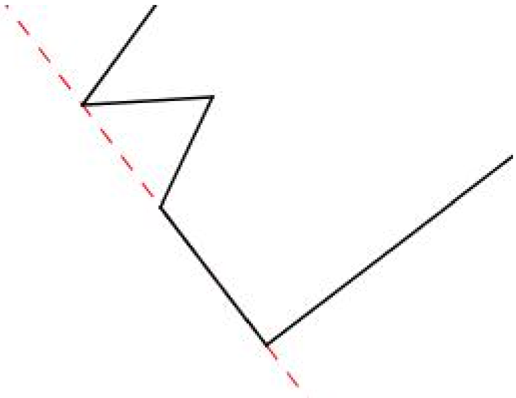
完成登山過程的兩人路徑為：

0 → 1 → 2 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 7 → 8 → 9 → 10→ 11
0'→ 1'→ 2'→ 3'→ 4'→ 5'→ 4'→ 3'→ 2'→ 1'→ 0'→ 1'→ 2'→ 3'→ 4'→ 5'→ 6'→ 7'

補充七：

直線ℓ掃過曲線時，起始和最終的交點情況可能有多個切點或頂點、或者是點和直線的組合，如下圖。任取其中一點，都可以完成登山遊戲。





參考文獻：

Toeplitz, O. (1911). Über einige Aufgaben der Analysis situs, *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn* (in German), 94 ,p197.

Emch, A. (1916). On some properties of the medians of closed continuous curves formed by analytic arcs, *American Journal of Mathematics*, 38 (1),pp6–18.

Stromquist, W. (1989). Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves, *Mathematika*, 36 (2),pp187–197.

Nielsen, M.J.; Wright, S. E. (1995). Rectangles inscribed in symmetric continua, *Geometriae Dedicata*, 56 (3),pp285–297.

Tao, Terence (2016). An integration approach to the Toeplitz square peg problem, (from: https://terrytao.wordpress.com/2016/11/22/an-integration-approach-to-the-toeplitz-square-peg-problem/)

wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Inscribed_square_problem and https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Toeplitz

Benjamin, M. (2014). A Survey on the Square Peg Problem, *Notices of the AMS*, 61(4),pp346-352.

Benjamin,M. (2009) .On the Square Peg Problem and Some Relatives.(from: https://arxiv.org/pdf/1001.0186.pdf)

Igor,P. (2008). The discrete square peg problem, (from: https://arxiv.org/pdf/0804.0657.pdf).

顧森（2012），《思考的樂趣：Matrix67 數學筆記》，北京，人民郵電出版社。