



香港教育大學

數學與資訊科技學系

小學教育 (榮譽) 學士學位課程 – 數學主修

香港與內地小學數學教科書的比較研究

——以香港現代教育版「圖形與空間」單元

和內地人教版「圖形與幾何」單元為例

學生姓名：信維

導師：文耀光博士

2018 年 5 月

A Project submitted to The Education University of Hong Kong

for the degree of Bachelor of Education (Honours) (Primary) - Mathematics

## Declaration

I, Xin Wei , declare that this research report represents my own work under the supervision of Associate Professor Dr. Man Yiu Kwong, and that it has not been submitted previously for examination to any tertiary institution.

Signed \_\_\_\_\_

Xin Wei

May 11, 2018

## 目錄

一、 研究背景和動機	7
二、 研究問題	8
三、 文獻回顧	9
1. 教科書的概念	9
2. 兩地教學課程大綱及教科書編寫	10
(1) 香港	10
(2) 內地	11
3. 幾何課程的理論	12
4. 相關研究	14
四、 研究設計	16
1. 研究對象	16
2. 研究方法	16
五、 研究結果	18
1. 宏觀比較	18
2. 認知發展	22
3. 欄目呈現	42
4. 具體課節分析	45

(1) 動手實作 .....	45
(2) 圓 .....	47
(3) 方向 .....	54
(4) 單元之間的關係 .....	57
(5) 「非標準」圖例的呈現 .....	59
<b>六、 相關改進建議 .....</b>	<b>68</b>
1. 課程指引的修訂及靈活運用 .....	68
2. 跨學科合作及校本課程 .....	68
3. 提示性信息和總結 .....	69
4. 引入動手實作及互動考核 .....	70
5. 培養學生欣賞和喜愛數學 .....	71
6. 增加非標準化圖例 .....	72
<b>七、 總結與展望 .....</b>	<b>73</b>
1. 研究結論 .....	73
2. 研究局限 .....	76
3. 未來研究方向 .....	77
<b>參考書目 .....</b>	<b>78</b>

## 表目錄

表1：香港數學課程指引「圖形與空間」範疇	10
表2：內地數學課程標準「圖形與幾何」單元	11
表3：van Hiele幾何方面的認知發展的五個層次	12-13
表4：香港「現代版」定價及頁數	20
表5：內地「人教版」定價及頁數	21
表6：各年級學生整體所處的van Hiele幾何認知層次	23
表7：「現代版」各年級學習重點所需van Hiele幾何認知層次	25-28
表8：「人教版」各年級學習重點所需van Hiele幾何認知層次	29-33
表9：「現代版」單元欄目設置	42
表10：「人教版」單元欄目設置	42
表11：「現代版」和「人教版」單元欄目設置的比較	44
表12：「平面圖形的直觀認識」的比較	60-61
表13：「角的認識」的比較	62-63
表14：「平行線的認識」的比較	65
表15：「梯形的認識」的比較	66-67

## 圖目錄

圖1：「現代版」3下A（頁85）探究三角形的包含關係 -----	36
圖2：「人教版」四年級下冊（頁66）探究四邊形的包含關係 -----	37
圖3：「人教版」四年級下冊（頁63）探究三角形按角分類時的包含關係 ----	38
圖4：「人教版」四年級下冊（頁64）探究三角形按邊分類時的包含關係 ----	38
圖5：「人教版」五年級下冊（頁20）探究長方體和正方體的包含關係 -----	38
圖6：「現代版」6上A（頁41）探究立體圖形面、頂和棱的數目的關係（ $F + V - E = 2$ ） -----	39
圖7：「人教版」四年級上冊（頁44）探究「對頂角相等」定理 -----	40
圖8：「人教版」四年級上冊（頁63）探究「平行線之間同位角相等」定理 --	41
圖9：「現代版」6下A（頁32-35）「圓的認識」探究過程 -----	48-51
圖10：「人教版」六年級上冊（頁58）「掌握圓的特徵」探究過程 -----	52
圖11：「現代版」5上A（頁10）八個方向運用港鐵路綫圖 -----	54
圖12：「人教版」三年級下冊（頁2）位置和方向（一）運用北京天安門建築群的實景圖和地圖 -----	55
圖13：「現代版」3下A（頁69）角（二）圖例 -----	64

## 一、 研究背景及動機

教科書是教師和學生教與學活動的重要載體和媒介，伴隨著教育活動與教育教學同時發生并同步發展（孔凡哲、張怡等, 2007）。教科書提供教師以教學內容和順序(Nicol & Crespo, 2006)，是決定教師教學活動的關鍵因素之一(Tarr et.al., 2008)，很大程度上影響教師要教什麼和如何教，進而對學生的學習造成重大影響（Reys, 2006; Törnroos, 2004）。同時，教科書的品質也決定著教育改革和課程計劃能否順利實施。因此，對於教科書的研究尤為重要。

在教科書的研究過程中，研究者可以實踐、檢驗并創新教學理論，進而完善教科書的編寫；對於教師來講，可以進一步理解教科書中的課程理念、結構設計以及知識呈現，從而更好的使用教科書進行更高層次的教學(石鷗，2007)，使教科書真正成為輔助教學的工具，而不是教學的目的。而不同地區教科書之間的比較研究，可以促進教科書的編寫者批判性的審視本地區的教科書，取長補短，為今後的課程及教科書改革提供依據。

筆者作為一個在中國內地完成基礎教育，在香港修讀教育專業學士課程、并完成了教學實習的學生，深感兩地在教育風格以及教科書設計等方面的諸多共性與差異。在學習和教學中，筆者都深切體會到教科書的重要性。故而希望通過此次研究的寶貴機會，對兩地的教科書進行比較研究。

## 二、 研究問題

依據上述的研究背景和動機，提出以下研究問題：

1. 以香港和內地的教育課程大綱為基礎，分析兩地對於圖形單元的課程目標和課程內容有何異同？
2. 以香港「現代教育出版社」以及內地「人民教育出版社」的小學數學教科書作為研究對象，分析其「圖形與空間」單元的組織結構設計以及教學特性有何異同？

### 三、 文獻回顧

#### 1. 教科書的概念

在教科書的相關研究中，「教材」「教科書」「課本」等名詞經常出現。顧明遠（1998）在《教育大辭典》中定義「教材」為較為廣義的概念，包括文字教材(含教科書、講義、講授提綱、圖表和教學參考書等)和視聽教材。而其對「教科書」則定義為狹義的「根據各科教學大綱(或課程標準)編寫的教學用書」，是教師和學生日常學習活動的重要媒介，為檢驗教師授課水平和學生學習能力提供依據，也幫助學生瞭解和學習更多範疇的知識。

教科書按照學年或學期分冊，香港地區小學教科書通常為每學年四冊，即每學期兩冊；而內地，以人教版為例，則是上下學期各一冊教科書。教科書中包含著課文、註解、插圖、習題等。

現今，隨著科技的發展，「電子教科書」擴大了大眾對於「教科書」的認知，使得「教科書」一詞不只是體系完整、印刷精美的紙製品，而是綫上學習資源、多媒體資源和各種工作紙的配套用品組合，也包含了互動教學的元素（周淑卿，2008）。香港的電子書市場也在飛速發展，有些學校甚至直接摒棄了傳統紙質教科書，無疑是看中了電子教科書中的互動功能以及輕質、環保等因素。

無論是任何地區、學科、年級、版本、材質，教科書都遵循著一定的教學理念。基於特定的教學目標，學科的知識結構特點，以及對應年齡層學生的能力發展情況，設計出最合理最適合的教科書。而本研究仍將以狹義的紙質教科書作為主要研究對象。

## 2. 兩地教學課程大綱及教科書編寫

### (1) 香港

香港課程發展議會（2000）的《數學課程指引（小一至小六）》，借鑒1983年小學數學科課程綱要和1995年「目標為本課程」數學科學習綱要，根據香港社會的發展和科技的進步，為香港的課程設計提出了教學宗旨，知識、技能、態度方面的教學目標及具體的課程結構和內容。該指引是現今發行的大部分小學數學教科書的編寫指引和綱要。

學習內容共包括五個學習範疇，筆者所要研究的「圖形與空間」範疇，對學生提出了如下要求（如表1）：

表1：香港數學課程指引「圖形與空間」範疇

小一至小三	小四至小六
<p>學生能</p> <ul style="list-style-type: none"><li>● 辨認和描述平面和立體圖形，并把它們分類</li><li>● 直觀的認識立體圖形的基本性質</li><li>● 認識平面圖形的性質</li><li>● 從已有條件製作平面和立體圖形</li><li>● 認識、描述及欣賞圖形</li><li>● 辨別四個方向</li></ul>	<p>學生能</p> <ul style="list-style-type: none"><li>● 理解平面和立體圖形的性質</li><li>● 進行平面和立體圖形的分類及製作</li><li>● 辨別八個方向</li></ul>

而課程發展議會（2017）數學教育委員會，也針對近年來社會的反映，以及2014年11月至2015年4月期間在「新學制中期檢討與前瞻」中所收集的意見，

修訂了《數學教育學習領域課程指引（小一至中六）》（2017），該指引也將成為今後教科書編寫的新指引。

香港采用教科書審查制，教育局組織專家對教科書進行評估（林智中，2008）。之後香港特別行政區教育局課本發展委員會（2017）將根據評估結果，在其官方網站上定期更新《適用書目表》，各學校及教師可根據需求自行選擇書目（黃顯華，2005）。以2017-2018年度為例，初小階段數學學科的《使用書目表》有超過十家出版社的不同版本的教科書可供選擇。

## (2) 內地

上世紀八十年代，中國內地的教科書政策才從「一綱一本」轉為「一綱多本」，之後業界人士不斷致力於教科書的改革和發展。中華人民共和國教育部（2011，2012）於2011年印發《義務教育數學課程標準（2011年版）》，2012年秋季正式執行。該課程標準從學段劃分、課程目標、課程內容等方面確立了小學數學課程的設計思路，內地的人教版、北師版等教科書均以此作為設計的指導思想。

課程標準安排了四個部分的課程內容，其中筆者的研究重點——圖形部分，即與香港「圖形與空間」單元相對應的「圖形與幾何」單元，主要內容有（如表2）：

表2：內地數學課程標準「圖形與幾何」單元

空間和平面基本圖形的認識，圖形的性質、分類和度量；圖形的平移、旋轉、軸對稱、相似和投影；平面圖形基本性質的證明；運用坐標描述圖形的位置和運動。
---

### 3. 幾何課程的理論

徐偉民和林美如(2009)分析了幾何課程中較為具代表性的理論，其中van Hiele學派的理論以兒童在幾何方面的認知發展為依據，根據能力和表現劃分為不同階段，是教科書的設計和分析值得遵循的原理。

van Hiele學派認為，兒童的幾何認知發展是一個循序漸進的過程，並不是隨著年齡增長自然產生，而是需要通過積累相關經驗，進而步入下一層次，整個過程存在一定的次序性。該認知理論共包含五個層次，綜合相關研究（van Hiele, 1986；Fuys，1988；徐偉民和林美如，2009；吳德邦、馬秀蘭和李懿芳，2007），對各層次的概括性描述如下（如表3）。

表3：van Hiele幾何方面的認知發展的五個層次

層次	描述
層次一： 視覺期	將圖形視作一個整體，以外部輪廓作為區分依據； 通過視覺直觀認知圖形的整體外觀，進而辨認圖形； 能說出三角形、正方形、立方體等等，但不能夠通過特性的層面來分析圖形； 不把形體一般化或自然地使用相關的語言（例如：所有、每一、全非）。
層次二： 分析期	逐漸掌握圖形的特徵和組成要素（例如：四條邊，三個角，兩組對邊平行、有一個直角等）； 但仍不能對性質和特徵之間的關係作出解釋； 開始使用相關的語言（例如：所有、每一、全非）。
層次三：	進一步探究圖形的特徵；

非形式化 演繹期	<p>認識圖形之間的包含關係（例如：菱形是平行四邊形）；</p> <p>雖然不瞭解證明定理的重要性，但已經能夠通過定義和理論、以及熟悉的基本前提解釋非正式的論證。</p>
層次四： 形式演繹 期	<p>兒童不再局限于幾何圖形的屬性和定義的視覺觀察和記憶，開始掌握證明的相關知識，如充分或必要條件，真假命題、逆否命題，能夠通過公理和定理進行推論（例如：利用平行公理等證明三角形內角和為<math>180^\circ</math>）；</p> <p>仍無法瞭解嚴密性的需要；</p> <p>能夠建立定理間的關係，但仍不瞭解演繹系統間的關係。</p>
層次五： 嚴密期	<p>學生能夠理解更為抽象的幾何問題；</p> <p>運用各種公設系統，建立定理并完成題目的證明和分析；</p> <p>分析或比較不同公設系統（例如，歐幾裏得幾何和非歐幾何等）；</p> <p>甚至可以建立自己的幾何公設系統。</p>

#### 4. 相關研究

據統計，2000-2012年，內地以「數學教材」為主題的約841篇研究論文中，聚焦小學階段的有112篇，其中只有14篇(12.5%)是小學教材比較研究(劉秘密，2012)，可謂十分之少。在這些為數不多的研究中，多在內地不同版本之間進行，如人教版、蘇教版、北師版等，較少涉及國際之間的比較。而國際之間的比較對象多為中國與美國、日本、韓國、新加坡、臺灣等地，涉及內地與香港之間的教科書比較極其鮮見(趙倡，2016)。

筆者共找到六篇涉及香港與內地教科書比較的研究，其中《美國、日本、澳門、香港、內地數學課程與教材的比較研究 研究成果述評》(全國教育科學規劃領導小組辦公室，2008)以文獻分析、課堂觀察、調查訪談、比較研究多重研究方式進行研究；《上海、香港、新加坡高中數學教科書的比較研究》(姚雪，2010)呈現了三地教科書在電子科技的結合、知識點的設立、初高中課程的銜接等方面的異同；《大陸和香港小學數學教科書的比較研究》(趙倡，2016)著重分析了以小學數學教科書比較為主題，特別是香港和內地之間，相關研究的稀缺度。上述研究論文均較為宏觀的分析比較了兩地甚至多地的數學教科書。

另外三篇以幾何為主要內容進行比較分析。《大陸與香港小學幾何課程比較》(張秀英，2009)以教科書編排方式和習題設計作為切入點值得借鑒；《兩岸三地角概念教科書內容比較之研究》(黃憐華，2013)以具體課題進行分析，對教學活動有指導意義；《台灣、中國與香港國小數學教科書幾何教材之內容分析》(徐偉民和林美如，2009)以數學認知的角度、通過具體案例分析，也是一篇很有參考價值的文章。

這些研究提供筆者以不同國家教科書的發展概況，呈現了比較教育學的相關研究方法，提出了課程大綱、編排結構、內容呈現、版面設計甚至插圖、紙張大小、書籍重量等多種研究角度和切入點。

## 四、 研究設計

### 1. 研究對象

筆者以現代教育研究社有限公司 2014 年出版的《現代小學數學》以及內地人民教育出版社小學數學教科書作為兩地研究代表，重點研究其中的「圖形和空間」（內地「圖形和幾何」）單元。

### 2. 研究方法

#### (1) 文獻分析法

筆者將先對兩地的數學教學課程文件進行文獻分析，找出其中對於教科書設計與編排起到指引作用的教學宗旨和教學目標，並分別按年級列出「圖形和空間」部分的課程結構和教學重點。

#### (2) 比較研究法——靜態文本比較

此部分為本研究的重點部分，將從內容特性、組織特性、教學特性等方面對這兩套教科書進行整體比較和舉例分析。

#### ①內容特性方面

主要分析兩套教科書知識點的差異，例如是否涉及圖形的定義、立體圖形的製作、角的度數、數學史、性質的證明等方面。並分析這些知識點對於學生數學知識體系的建構以及今後的學習有什麼影響。

## ②組織特性方面

比較各教學單位安排的年級和先後順序，分析同一內容的課題以何種系統組織方式呈現（直線型或螺旋型）。另外，根據van Hiele學派，兒童從第一階段視覺期過渡到第二階段分析期時，不僅具備從外觀的直觀角度分析圖形的能力，更逐漸開始從特性的層面進行分析。故而結合近年來對學生認知發展的相關研究，分析教科書的設計是否順應和契合兒童的認知發展，即分析在教科書引入圖形特性教學的年級，對應年齡段的學生是否步入第二階段，具有相關認知能力和水平。

## ③教學特性方面

關注教科書、以及教師用書或教師備課冊等配套用書中建議的教學活動，分析這些教學內容和活動是否能夠幫助學生理解這一章節的知識點，以及能否達成課程指引或綱領對於數學教學的整體要求，例如培養學生的探究能力、解難能力、對於數學的欣賞和興趣等。另外，分析習題的設計以及單元總結等環節對於學生的引導和幫助，細化到選取具有代表性課題，分析不同教科書中教學重點、教學角度以及文本和習題的安排。同時，總結近年來公開考試（如香港TSA）以及教學研究中發現的學生較為集中出現的易錯點和掌握難點，分析是否與教科書在該部分的教育設計不完善或不合理存在關係。

通過對上述三方面的整體比較和舉例分析，探討兩地教科書的內容設計是否合理且有效，即是否符合學生的認知發展和認知能力，能否實現課程大綱中的宏觀和具體目標，促進學生數學概念、能力以及個人發展等。

## 五、 研究結果

### 1. 宏觀比較

香港和內地都采用教科書審查制度，由教育局或教育部給出適用書目表。根據香港特別行政區教育局課本發展委員會(2018a, 2018b, 2018c, 2018d)最新修訂的適用書目表，在小學階段，包括本文的研究對象現代教育研究社有限公司的《現代小學數學》一書在內，目前共有 11 個版本的中文數學用書以及 7 個版本的英文數學用書獲課本評審小組通過。儘管現代教育研究社、牛津大學出版社等五間出版社市場占有率較大，但競爭依然激烈，特別是在近期的電子書教科書市場。

中國內地目前仍採用中華人民共和國教育部辦公廳（2016）發佈的《2016 年義務教育教學用書目錄》，在義務教育 1—6 年級階段，共有人民教育出版社、北京師範大學出版社、江蘇教育出版社等 7 間編寫、出版單位被納入目錄。然而，相比之下，儘管中國內地省市眾多，但在中小學教科書的編輯方面，仍以人教版為主。成立於 1950 年的人民教育出版社直屬於中華人民共和國教育部，市場占有率可達到約 50%（楊國揚和王立心，2010）。雖然近年來北京師範大學出版社等出版單位也在迅速崛起，但人民教育出版社的市場地位一時間難以撼動。

香港《現代小學數學》（後簡稱「現代版」）每一學年的上下兩個學期各有 A 冊和 B 冊，故一學年有 4 本教科書。教科書采用四彩色印刷技術，以及質素較佳的「粉紙」而非「書紙」（香港特別行政區立法會，2009），每冊書的尺寸約為 A4，定價均為港幣 77.5 元（現代教育研究社有限公司，2017），頁數平均為 91 頁（見表 4）。

內地人民教育出版社（後簡稱「人教版」）每一學年的上下兩個學期各一冊教科書，故一學年有 2 本教科書。教科書採用綠色印刷標準印刷，選用環保型紙張、油墨、膠水等原輔材料。每冊書的尺寸為 787 毫米×1092 毫米（即 16 開），定價平均為人民幣 7.39 元，頁數平均為 113 頁（見表 5）。

整體來講，香港的教科書市場競爭更為激烈，市場化水平更高，更新速度快。從教科書質量角度，「現代版」較「人教版」單頁紙張尺寸略大，紙質、色彩等方面較佳。直觀從教科書的含量的角度分析，香港一學年約為  $91 \times 4 = 364$  頁，而內地一年約為  $113 \times 2 = 226$  頁，香港約為內地的 1.6 倍，故而理論上應包含更多的教學內容。但教科書的分析不單單是宏觀層面上「含量」的比較，接下來，筆者將對教科書的內容進行詳細分析。

表 4：香港「現代版」定價及頁數

年級	定價(HKD/\$)	頁數	年級	定價(HKD/\$)	頁數
一上 A	77.50	104	四上 A	77.50	102
一上 B	77.50	100	四上 B	77.50	96
一下 A	77.50	100	四下 A	77.50	106
一下 B	77.50	90	四下 B	77.50	111
二上 A	77.50	101	五上 A	77.50	94
二上 B	77.50	83	五上 B	77.50	80
二下 A	77.50	95	五下 A	77.50	104
二下 B	77.50	92	五下 B	77.50	84
三上 A	77.50	88	六上 A	77.50	75
三上 B	77.50	76	六上 B	77.50	80
三下 A	77.50	96	六下 A	77.50	74
三下 B	77.50	76	六下 B	77.50	84
<b>平均</b>	<b>77.50</b>	<b>91.29</b>			

表 5：內地「人教版」定價及頁數

年級	定價(人民幣/元)	頁數	年級	定價(人民幣/元)	頁數
一上	7.30	111	四上	7.75	117
一下	7.05	105	四下	7.75	119
二上	7.05	107	五上	7.95	119
二下	7.95	123	五下	7.95	123
三上	7.50	115	六上	7.75	119
三下	7.50	115	六下	7.50	115
<b>平均</b>	<b>7.39</b>	<b>112.67</b>			

## 2. 認知發展

van Hiele 學派關於幾何認知發展的理論在現今的數學幾何研究中較為常用。該理論將兒童在幾何方面的認知發展，根據能力和表現劃分為五個層次（van Hiele, 1986）。在不同層次之間，學生從憑藉直觀視覺辨認，過渡到以特性分析圖形，進而發展為探究圖形之間的包含關係及相關定理，同時整個過程都伴隨著使用不同的語言來呈現思考過程。

顯然，在每一個層次中，學生的幾何認知能力都有較大的不同。教科書的編寫需依據這樣的層次劃分，形成的適切的數學知識架構，進而為處於不同層次的學生，針對他們的幾何認知和思考能力，提供適合的知識點，促進學生的數學能力發展，幫助學生順利步入下一認知發展層次。所以分析教科書中每一個教學重點所屬的幾何認知層次，並分別討論它們是否符合使用者（學生）所具備的的層次，就尤為重要。

然而，教科書按照年級和學期出版，基本上針對特定的年級和年齡的學生進行學期性地編寫，所以需要瞭解不同年級學生的幾何認知能力。筆者查閱和分析了不同地區的多項研究，發現小學階段的學生多介於「層次一視覺期」至「層次三非形式化演繹期」之間。然而值得關注的是，在相關的測試中，小學各年級，特別是一年級和二年級學生，仍存在部分學生未達層次一視覺期的現象（吳德邦、馬秀蘭和李懿芳，2007）。

在一年級，絕大多數學生處於「層次一視覺期」（吳金聰，2017）；從二年級開始，儘管大部分學生仍處於層次一，但已有一些地區的部分學生步入「層次二分析期」（吳金聰，2017；吳德邦和鄭佳昇，2001，薛建成，2003；郭欣，2015），

比例相異；但仍有部分地區的小學生在三年級才開始步入層次二（Wu & Ma, 2006）。

三到六年級的學生基本都通過層次一，能夠憑藉直觀視覺來認知圖形，並開始逐步具備通過特性分析圖形的能力。各地區在五年級階段，都有超過半數的學生處於層次二分析期（吳德邦、馬秀蘭和李懿芳，2007；薛建成，2003；郭欣，2015；何森豪，2001）

從四年級開始，已經有少數學生步入「層次三非形式化演繹期」（吳金聰，2017；何森豪，2001）。但直到六年級，才會有較多的學生步入層次三（郭欣，2015；何森豪，2001）。

整體上，學生的幾何發展因應地區和學校存在一定差異，但一、二年級整體處於「層次一視覺期」，三年級開始步入「層次二分析期」，四到六年級整體處於層次二，並有一些學生能夠來到「層次三非形式化演繹期」。所以，教科書各年級的教學重點的安排應「順應且不超過」這樣的幾何認知能力分布規律，即如下（表6）所示：

一年級	二年級	三年級	四年級	五年級	六年級
層次一	層次一	層次二	層次二	層次二	層次三

表6：各年級學生整體所處的van Hiele幾何認知層次

van Hiele 的理論研究多針對平面幾何圖形，而 Fuys 等人（1988）提出針對 van Hiele 層次的描述和學生反映的例子，也著眼平面幾何的部分。吳德邦、馬秀蘭和李懿芳(2007)則根據 Fuys 的分析，關注立體幾何部分，列出相應的描述

和判別依據。筆者根據上述研究，運用其中的描述，從教學流程、教學語言、習題要求等角度綜合考量，詳列「現代版」（如表 7）和「人教版」（如表 8）各年級學習重點所需 van Hiele 幾何認知層次。其中，如符合前文的數據統計（表 6）的教學重點，則以「✓」表示；如不符合（超過或低於），則具體列明其所需要的幾何認知層次。

表 7：「現代版」各年級學習重點所需 van Hiele 幾何認知層次

年級	單位：圖形與空間	課程文件學習重點	學習重點 (現代版專科教學手冊)	是否符合	注： 該年級 整體認 知層次
一上	1S1(10) 立體圖形(一) (柱體、錐體和球體)	1. 認識柱體、錐體和球體。 2. 直觀地辨別各種立體圖形。 3. 把立體圖形分類。 4. 簡單描述兩個立體圖形間的相互位置。	<u>10 立體圖形(一) (3)</u> 1. 直觀地辨別柱體、錐體和球體。 2. 把立體圖形分類。 <u>11 立體圖形(二) (3)</u> 1. 比較立體圖形的大小。 2. 簡單描述兩個立體圖形間的相互位置。	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	層次一： 視覺期
	1S2(3) 直線和曲線	1. 認識直線和曲線。 2. 直觀地辨認直線和曲線。 3. 用不同方法製作直線和曲線。	<u>25 直線和曲線 (3)</u> 1. 直觀辨認直線和曲線。 2. 畫出直線和曲線。	✓ ✓	
一下	1S3(12) 平面圖形 (多邊形和圓形)	1. 認識三角形、四邊形、五邊形、六邊形及圓形。 2. 直觀地辨認各種平面圖形。 3. 把平面圖形分類。 4. 直觀地辨別正方形及長方形。 5. 簡單描述兩平面圖形間的相互位置。 6. 用不同方法製作平面圖形。	<u>21 平面圖形(一) (3)</u> 直觀辨認三角形、四邊形、五邊形、六邊形及圓形。 <u>22 平面圖形(二) (3)</u> 1. 直觀辨認正方形和長方形。 2. 描述不同圖形之間的大小和相互位置。 3. 認識不同平面圖形的邊數和角數。(選教) <u>23 平面圖形(三) (4)</u> 用不同的方法製作平面圖形。	✓ ✓ ✓ 層次二 ✓	層次一： 視覺期
二上	2S1(8) 立體圖形(二) (角柱、圓柱、角錐和圓錐)	1. 直觀地辨認角柱和圓柱。 2. 直觀地辨認角錐和圓錐。 3. 直觀地認識面。 4. 把各種立體圖形分類。 5. 製作立體圖形。	<u>12 柱體 (4)</u> 1. 辨認角柱和圓柱。 2. 認識柱體的各個面。 3. 製作簡單的柱體。 <u>13 錐體 (4)</u> 1. 辨認角錐和圓錐。 2. 認識錐體的各個面。 3. 製作簡單的錐體。	✓ 層次二 ✓ ✓ 層次二 ✓	層次一： 視覺期
	2S2(4) 角(一) (角及直角)	1. 認識角。 2. 認識直角。 3. 比較角的大小。 4. 用不同的方法製作角。	<u>8 角(一) (3)</u> 1. 認識角和直角。 2. 分辨直角。 3. 拼砌四邊形的四個角。(選教)	✓ ✓ ✓	

			<u>9 角 (二) (3)</u> 1. 比較角的大小。 2. 用不同的方法製作角。	✓ ✓	
二 下	2S3 (4) 四 個 主 要 方 向	1. 認識東、南、西、北 四個方向。 2. 用指南針測方向。	<u>6 方向 (4)</u> 1. 分辨東、南、西、北四個方 向。 2. 使用指南針測方向。	✓ 層次二	層次一： 視覺期
	2S4 (9) 四 邊 形 (一) (長 方 形、正 方 形、梯 形、菱 形 等)	1. 認識一些常見的四邊 形，包括長方形、正方 形、梯形及菱形。 2. 分辨正方形及長方形 的相同及不同之處。 3. 用不同的方法作四邊 形。	<u>20 正方形和長方形 (3)</u> 認識正方形和長方形的特性， 從而分辨出它們的相同及不 相同之處。 <u>21 菱形和梯形 (3)</u> 憑直觀分辨菱形和梯形。 <u>22 四邊形的製作 (3)</u> 利用不同的方法製作四邊形。	層次二 ✓ 層次二 層次二	
三 上	3S1 (3) 平 行 和 垂 直	1. 認識平行線。 2. 用不同的方法製作平 行線。 3. 認識垂直線。 4. 用不同的方法製作垂 直線。	<u>16 垂直線 (4)</u> 1. 認識互相垂直的概念。 2. 製作垂直線。 3. 最短的距離。(選教) <u>17 平行線 (3)</u> 1. 認識互相平行的概念。 2. 製作平行線。	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	
	3S2 (6) 四 邊 形 (二) (平 行 四 邊 形 的 特 性)	1. 認識平行四邊形的簡 單特性(兩對對邊平 行；兩對對邊長度相 等)。	<u>18 平行四邊形 (3)</u> 1. 憑直觀辨認平行四邊形。 2. 認識平行四邊形的特性。 3. 製作平行四邊形。	層次一 ✓ ✓	
三 下	3S3 (5) 角 (二) (銳 角、 鈍 角)	1. 認識銳角和鈍角。 2. 比較角的大小。	<u>8 銳角和鈍角 (4)</u> 1. 分辨直角、銳角和鈍角。 2. 比較角的大小。 3. 製作不同的角。	✓ ✓ ✓	層次二： 分析期
	3S4(10) 三 角 形	1. 認識三角形的簡單特 性。 2. 認識一些特別的三角 形，例如：直角三角形、 等腰三角形、等邊三角 形和不等邊三角形。 3. 製作三角形。	<u>9 三角形 (5)</u> 1. 三角形的基本特性。 2. 按三角形的特性分類。 3. 三角形的分類(按角分類) (選教) <u>10 三角形的製作 (3)</u> 利用不同的方法製作三角形。	✓ ✓ ✓ 層次三 ✓	
四 上	4S1(10) 四 邊 形 (三) (四 邊 形	1. 認識梯形及菱形的簡 單特性。 2. 比較各種四邊形的特 性。	<u>6 四邊形 (一) (4)</u> 1. 探究正方形、長方形和平 行四邊形的特性。 2. 用不同方法製作這三種四	✓ ✓	層次二： 分析期

	的特性)	3. 用不同的方法製作四邊形。	邊形。 <u>7 四邊形(二) (3)</u> 1. 探究菱形和梯形的特性。 2. 利用釘板和七巧板製作這兩種四邊形。 3. 探究鷓形的特性及製作鷓形。(選教) 4. 認識不同的四邊形中的對角線。(選教) <u>8 四邊形(三) (3)</u> 1. 利用不同的圖形拼砌四邊形。 2. 比較不同四邊形的特性。 3. 一些四邊形相互之間的關係。(選教)	✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓	層次三
四下	4S2 (9) 圖形拼砌與分割	1. 用平面圖形進行圖形拼砌。 2. 分割平面圖形，并辨認所得的圖形。	<u>5 圖形拼砌 (3)</u> 1. 利用七巧板拼砌圖形。 2. 在釘點紙和方格紙上畫出由幾個圖形組成的新圖形。 <u>6 圖形分割 (4)</u> 1. 把平面圖形依指示進行分割。 2. 認識正多邊形的特性。(選教)	✓ ✓ ✓ ✓	層次二：分析期
	4S3 (8) 對稱	1. 認識對稱圖形，并找出對稱軸。 2. 製作對稱圖。	<u>14 對稱圖形(一) (3)</u> 1. 認識對稱圖形的特點。 2. 找出對稱軸。 <u>15 對稱圖形(二) (3)</u> 製作對稱圖形。	層次一 層次一 層次一	
五上	5S1 (6) 八個方向	1. 認識八個主要方向。 2. 用指南針測方向。	<u>1 方向(一) (3)</u> 1. 認識八個主要方向。 2. 利用自製方向板測方向。 <u>2 方向(二) (3)</u> 1. 用指南針判辨方向。 2. 用八個方向指出路綫。	✓ ✓ ✓ ✓	層次二：分析期
五下	5S2(10) 立體圖形(三) (柱體、錐體和球體的特性)	1. 認識圓錐、角錐、圓柱、角柱及球體的特性。 2. 製作正方體及長方體的摺紙圖樣。	<u>4 立體圖形(一) (4)</u> 認識柱體、錐體和球體的特性。 <u>5 立體圖形(二) (4)</u> 1. 認識長方體和正方體的特性。 2. 製作長方體和正方體的摺紙圖樣。	✓ ✓ ✓	層次二：分析期

六上	6S1(14) 立體圖形(四) (頂、棱、面和截面)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識立體圖形中的頂、棱和麵。</li> <li>2. 製作柱體和錐體的支架。</li> <li>3. 探究柱體和錐體的棱和底邊數目的關係。</li> <li>4. 探究柱體和錐體的頂和底邊數目的關係。</li> <li>5. 探究及設計柱體的摺紙圖樣。</li> <li>6. 製作角錐及角柱。</li> <li>7. 認識柱體、錐體和球體的不同截面。</li> </ol>	<u>4 立體圖形(一) (5)</u> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 立體圖形的頂、楞和麵。</li> <li>2. 角柱的頂、棱的數目和底的邊數的關係。</li> <li>3. 角錐的頂、棱的數目和底的邊數的關係。</li> </ol> <u>5 立體圖形(二) (5)</u> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 利用摺紙圖樣製作角柱和角錐。</li> <li>2. 設計角柱的摺紙圖樣。</li> <li>3. 面、頂和楞的數目的關係(認識<math>F + V - E = 2</math>的關係)。</li> </ol> <b>(選教)</b> <u>16 立體的截面 (6)</u> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識截面的意義。</li> <li>2. 認識柱體、錐體和球體的不同截面。</li> </ol>	層次二 ✓ ✓ 層次二 層次二 ✓ 層次二 ✓	層次三：非形式化演繹期
六下	6S2 (6) 圓	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識圓的特性及圓心、半徑、直徑和圓周。</li> <li>2. 用不同的方法作圓。</li> </ol>	<u>4 圓的認識(一) (3)</u> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識圓心、半徑和直徑的意義。</li> <li>2. 認識半徑和直徑的關係。</li> </ol> <u>5 圓的認識(二) (3)</u> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學習量度直徑的方法。</li> <li>2. 學習以圓心、半徑和直徑組成的圖形的特性。</li> </ol> <u>6 圓的製作 (3)</u> 學習用不同的方法製作圓。	層次二 ✓ 層次二 層次二 層次二	層次三：非形式化演繹期

表 8：「人教版」各年級學習重點所需 van Hiele 幾何認知層次

年級	單位：圖形與幾何	課程文件學習重點	教學目標 (人教版教師教學用書)	是否符合	注： 該年級 整體認 知層次
一上	2.位置	會用上、下、左、右、前、後描述物體的相對位置。	會用上、下、前、後、左、右描述物體的相對位置。 (2)	✓	層次一： 視覺期
	4.認識圖形(一)	能通過實物和模型辨認長方體、正方體、圓柱和球等幾何體。	直觀認識長方體、正方體、圓柱、球。(2)	✓	
一下	1.認識圖形(二)	能辨認長方形、正方形、三角形、平行四邊形、圓等簡單圖形。 會用長方形、正方形、三角形、平行四邊形或圓拼圖。	直觀認識長方形、正方形、三角形、圓、平行四邊形。(3)	✓  ✓	層次一： 視覺期
二上	1.長度單位	結合生活實際，經歷用不同方式測量物體長度的過程，體會建立統一度量單位的重要性。 能估測一些物體的長度，並進行測量。	初步認識長度單位厘米和米； 初步建立1米、1厘米的長度概念，知道1米=100厘米； 初步學會用刻度尺量物體的長度（限整厘米）； 初步形成估計物體長度的意識； 初步認識線段。會量整厘米線段的長度。		層次一： 視覺期
	3.角的初步認識	結合生活情境認識角，瞭解直角、銳角和鈍角。	初步認識角，知道角的各部分名稱； 初步認識直角、銳角和鈍角； 會用三角尺判斷一個角是不是直角； 會辨認銳角、鈍角； 初步學會畫線段、角和直角。(4)	✓  ✓  ✓	
	5.觀察物體(一)	能根據具體事物、照片或直觀圖辨認從不同角度觀察到的簡單物體。	能辨認從不同位置觀察到的簡單圖形的形狀。(2)	✓	

二下	3.圖形的運動 (一)	結合實例，感受平移、旋轉、軸對稱現象；能辨認簡單圖形平移後的圖形；通過觀察、操作，初步認識軸對稱圖形；能對簡單幾何體和圖形進行分類（軸對稱）。	初步認識軸對稱現象；初步感知平移、旋轉現象（4）	✓ ✓	層次一： 視覺期
三上	3.測量	在實踐活動中，體會并認識長度單位千米、米、厘米，知道分米、毫米，能進行簡單的單位換算，能恰當地選擇長度單位。	認識長度單位毫米、分米、千米；初步建立1毫米、1分米、1千米的長度概念，知道1千米=1111米。		層次二： 分析期
	7.長方形和正方形	通過觀察、操作，初步認識長方形、正方形的特徵；結合實例認識周長，并能測量簡單圖形的周長，探索并掌握長方形、正方形的周長公式。	掌握長方形、正方形的特性，會在方格紙上畫長方形、正方形；（1）知道周長的含義，會計算長方形、正方形的周長。（5）	✓	
三下	1.位置和方向 (一)	給定東、南、西、北四個方向中的一個方向，能辨認其餘三個方向，知道東北、西北、東南、西南四個方向，會用這些詞語描繪物體所在的方向。	認識東、南、西、北、東北、西北、東南、西南八個方向，根據給定東、南、西、北四個方向中的一個方向辨認其餘三個方向，并能用這些詞語描繪物體所在的方向。（4）	✓	層次二： 分析期
	5.面積	結合實例認識面積，體會并認識面積單位厘米 <sup>2</sup> 、分米 <sup>2</sup> 、米 <sup>2</sup> ，能進行簡單的單位換算；探索并掌握長方形、正方形的面積公式，會估計給定簡單圖形的面積。	認識面積的含義，能用自選單位估計和測量圖形的面積，體會并認識面積單位（平方厘米、平方分米、平方米、平方千米、公頃），會進行簡單的單位換算；掌握長方形、正方形的面積公式，會用公式正確計算長方形、正方形的面積，并能估計給定的長方形、正方形的面積。		
四上	2.公頃和平方千米	知道面積單位：千米 <sup>2</sup> 、公頃。	認識面積單位公頃和平方千米；知道公頃、平方千米之間的進率，會進行簡單的單位換算。		

	3.角的度量	結合實例瞭解綫段、射綫和直綫。 體會兩點間所有連綫中綫段最短，知道兩點間的距離。 知道平角與周角，瞭解周角、平角、鈍角、直角、銳角之間的大小關係。 用量角器量指定角的度數，能畫指定度數的角，會用三角尺畫 $30^\circ$ ， $45^\circ$ ， $60^\circ$ ， $90^\circ$ 角。	認識綫段、直綫和射綫，知道他們的區別；（1） 認識常見的幾種角，會比較角的大小，會用量角器量出角的度數，（1） 能按制定度數畫角。（2）	✓ ✓ ✓	層次二： 分析期
	5.平行四邊形和梯形	結合生活情境瞭解平面上兩條直綫的平行和相交（包括垂直）關係。 通過觀察、操作，認識平行四邊形、梯形。	認識垂綫、平行綫，會畫垂綫；（3） 掌握平行四邊形和梯形的特性； 理解四邊形之間的關係。（3）	✓ ✓ ✓	層次三
四下	2.觀察物體（二）	能辨認從不同方向（前面、側面、上面）看到的物體的形狀圖。	能辨認從不同方位看到的物體或幾何體的形狀圖。（2）	✓	層次二： 分析期
	5.三角形	認識三角形，通過觀察、操作，瞭解三角形兩邊之和大于第三邊、三角形內角和是 $180^\circ$ 。 認識等腰三角形、等邊三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。	認識三角形的特性，會根據三角形的邊、角特點給三角形分類，知道三角形任意兩邊之和大于第三邊以及三角形的內角和是 $180^\circ$ 。（6）	✓ ✓	
	7.圖形的運動（二）	通過觀察、操作等活動，進一步認識軸對稱圖形及其對稱軸，能在方格紙上畫出軸對稱圖形的對稱軸；能在方格紙上補全一個簡單的軸對稱圖形。	能在方格紙上補全一個軸對稱圖形； 會在方格紙上將一個簡單的圖形沿水平方向或垂直方向平移。（4）	✓ ✓	
五上	2.位置	在具體情境中，能在方格紙上用數對（限于正整數）表示位置，知道數對與方格紙上點的對應	在具體情境中，能在方格紙上用數對（正整數）表示位置。（2）	✓	層次二： 分析期
	6.多邊形的面積	探索并掌握三角形、平行四邊形和梯形的面積公式，并能解決簡單的實際問題。 會用方格紙估計不規則	探索并掌握平行四邊形、三角形和梯形的面積公式，并能用公式解決簡單的實際問題。		

		圖形的面積；			
五下	1.觀察物體(三)	能辨認從不同方向(前面、側面、上面)看到的物體的形狀圖	根據給出的從一個方向看到的形狀圖,用給定數量的小正方體擺出相應的幾何組合體。 根據給出的從三個方向看到的形狀圖,用小正方體擺出相應的幾何組合體(2)	✓  ✓	層次二:分析期
	3.長方體和正方體	通過觀察、操作,認識長方體、正方體,認識長方體、正方體的展開圖 結合具體情境,探索并掌握長方體、正方體的表面積和體積的計算方法,并能解決簡單的實際問題; 體驗某些實物(如土豆等)體積的測量方法; 通過實例瞭解體積(包括容積)的意義及度量單位(米 <sup>3</sup> 、分米 <sup>3</sup> 、厘米 <sup>3</sup> 、升、毫升),能進行單位之間的換算,感受1米 <sup>3</sup> 、1厘米 <sup>3</sup> 以及1升、1毫升的實際意義。	長方體和正方體的認識;(2) 結合具體情境,探索并掌握長方體和正方體的體積和表面積的計算方法;探索某些實物體積的測量方法。(11)	✓	
	5.圖形的運動(三)	通過觀察、操作等,在方格紙上認識圖形的平移與旋轉,能在方格紙上按水平或垂直方向將簡單圖形平移,會在方格紙上將簡單圖形旋轉91°; 能從平移、旋轉和軸對稱的角度欣賞生活中的圖案,并運用它們在方格紙上設計簡單的圖案。	能在方格紙上將簡單圖形旋轉90度; 欣賞生活中的圖案,靈活運用平移、對稱和旋轉在方格紙上設計圖案。(3)	✓  ✓ ✓	
六上	2.位置和方向(二)	能根據物體相對於參照點的方向和距離確定其位置。 會描述簡單的路線圖。	能用方向和距離表示位置,初步體會坐標的思想。(3)	層次二	層次三:非形式化演繹期
	5.圓	通過操作,瞭解圓的周長與直徑的比為定值,掌握圓的周長公式;探索并掌握圓的面積公式,并能解決簡單的實際問題。	掌握圓的特徵,會用圓規畫圓; 探究并掌握圓的周長和麵積公式,能够解決與圓的周長和麵積相關的簡單的	層次二  ✓	

			實際問題。 知道扇形的基本特徵。(12)	層次二	
六下	3.圓柱與圓錐	通過觀察、操作，認識圓柱和圓錐，認識圓柱的展開圖； 結合具體情境，探索并掌握圓柱的體積和表面積以及圓錐體積的計算方法，并能解決簡單的實際問題。	認識圓柱、圓錐的特徵； 會計算圓柱的表面積和圓柱、圓錐的體積。(9)	層次二 ✓	層次三：非形式化演繹期
	4.比例	瞭解比例尺；在具體情境中，會按給定的比例進行圖上距離與實際距離的換算； 能利用方格紙按一定比例將簡單圖形放大或縮小。	會看比例尺，能利用方格紙等形式按一定的比例將簡單圖形放大或縮小。(14)	層次二	

從表格的對比可以看出，「現代版」和「人教版」的安排大體相同。其中，一、二年級主要為層次一視覺期；「現代版」二年級下學期開始大幅度引入層次二分析期的知識點，而「人教版」則略晚一個學期，從三年級上學期開始；三至五年級主要為層次二；而在六年級，兩地均逐步增加層次三非形式化演繹期的知識點。所以，兩地的教學重點安排基本符合前文提到的不同地區學生的幾何認知發展階段。

然而，其中有一些教學重點的安排值得商討。

「現代版」方面，2S1 立體圖形（二）部分，香港課程指引中的要求是「直觀地認識面」，屬於層次一視覺期。而「現代版」該部分的教學重點「認識柱體和錐體各個面」，實際要求則是需要確定底和側面、認識每個面的形狀、并根據底的形狀對立體圖形命名等一系列屬於層次二分析期的知識點。這些高層次的知識點過早的引入，且與 5S2 立體圖形（三）中的知識點有很大的重複度。

2S4 四邊形（一）部分，雖然是「憑直觀分辨菱形和梯形」，但實際上教科書中也從特性的角度探討了這兩個圖形。一方面，這和課程指引并未給出具體詳細的要求有關；另一方面，這也和近年來 TSA 等大型考試中的命題不無關係。由于該課題較難完全從視覺層面分析，所以新的課程指引中（香港課程發展議會，2017），該部分則是被後移至三年級和四年級，從特性的角度直接進行分析。

「人教版」方面，在四年級下冊，就對「三角形兩邊之和大於第三邊」以及「三角形內角和是  $180^\circ$ 」的定理進行討論，也對學生的非形式化演繹能力提出了較高的要求。

而對於同一年級學生存在的幾何認知水平差異情況，兩地采取了多種措施。「現代版」主要以供選教的「學習增值區」來引入一些進階內容，而「人教版」則是通過引導性語句、溫氏圖以及探究性習題來幫助學生接觸下一認知層次的內容。

香港「現代版」的「學習增值區」是一個教師選教的版塊，為能力較強（即較早的步入下一層次）的學生，提供了很好的資源。以其中幾例具體分析如下：

(1) 1S3 平面圖形：認識不同平面圖形的邊數和角數。

一年級的學生尚屬層次一視覺期，故而這部分內容不涉及邊和角的定義，在邊和角上仍屬直觀認知，即層次一。但是該板塊引導學生分析三角形、正方形、長方形、五邊形、六邊形有幾條邊和幾個角，並通過長方形、正方形以及一般四邊形來總結四邊形有幾條邊和幾個角，所以在一定程度上已經進入層次二分析期，幫助學生從邊和角的數量這些特性認識平面圖形。

(2) 3S4 三角形：三角形的分類（按角分類）

三年級的學生屬於層次一視覺期和層次二分析期。本單元正文部分，只介紹了直角三角形。而此部分選教內容，引入了銳角三角形和鈍角三角形的定義和特徵，這些都尚屬層次二分析期。但最後的綜合表格（如圖1），將三角形按邊分類和按角分類結合起來。如果學生有能力，教師是可以引導學生發現的等邊三角形都是銳角三角形的規律，瞭解兩者的包含關係，幫助學生步入層次三非形式化演繹期。

3 利用下表來總結：

	銳角三角形	直角三角形	鈍角三角形
等邊三角形			
等腰三角形			
不等邊三角形			

圖1：「現代版」3下A（頁85）探究三角形的包含關係

(3) 4S1 四邊形（三）：一些四邊形相互之間的關係。

四年級的學生基本屬於層次二分析期，因此在該單元正文中，對於不同的四邊形，採取「比較」的方式分析他們的特性，比較他們共同擁有的特性，比較一種四邊形A比另一種四邊形B多出的特性（例如，長方形和平行四邊形均有兩組對邊平行且相等的特性，但長方形比四邊形多出有四個直角的特性）。但分析到這裡，都沒有用數學語言說出因為A包含B的全部特性，並且多出一條或多條特性，所以「A是B」這種進入層次三非形式化演繹期會考慮的包含關係。但選教部分，討論的是當A滿足（本不屬於它的）某一特性時，就成為B，所以B是A的一種。這是從層次二分析期步入層次三非形式化演繹期最鮮明的案例，學生通過這些例子可以知道正方形是長方形/菱形/平行四邊形的一種，正方形/菱形是平行四邊形的一種。

而內地「人教版」則偏重運用提示性語句以及溫氏圖來幫助學生獲取圖形之間的包含關係，進而從層次二步入層次三。

#### (1) 四年級上冊 平行四邊形和梯形

該單元的最後部分（如圖 2），用提示性語句引導學生思考長方形和正方形與平行四邊形的包含關係，之後將本單元所學習的平行四邊形和梯形，與之前所學習的四邊形綜合性總結，運用溫氏圖來表示這些四邊形之間的關係，幫助該階段學生步入層次三非形式化演繹期。

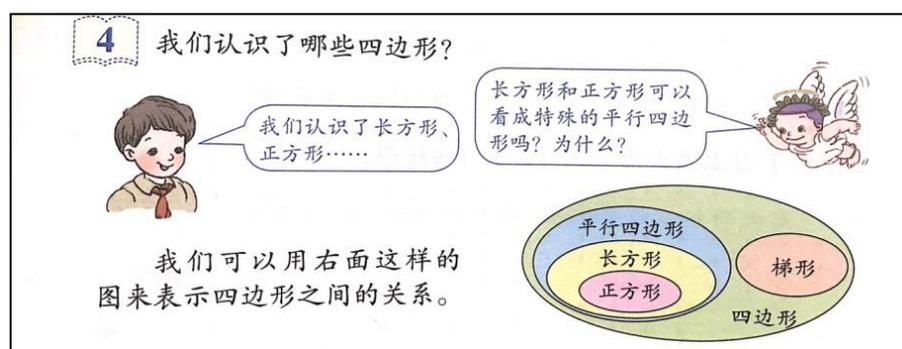


圖 2：「人教版」四年級上冊（頁 66）探究四邊形的包含關係

#### (2) 四年級下冊 三角形的分類

當按照角的特點給三角形分類時，三角形可以分為銳角三角形、直角三角形和鈍角三角形三類，三個類別之間沒有重合部分。而按角分類時，除這三個類別也沒有其他可能性。所以運用溫氏圖（如圖 3）可以很直觀的詮釋——「任一三角形必屬於且只屬於三種之中的一種」。而當按照邊的特點給三角形分類時，給予小學生的提示性語句，說出「我發現等邊三角形也是等腰三角形」（如圖 4），提示學生兩種三角形之間的包含關係。

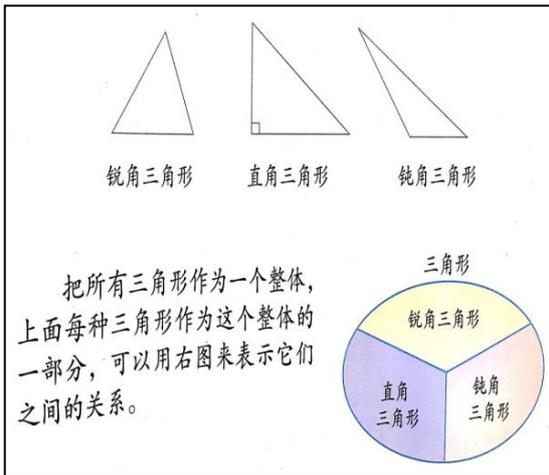


圖 3：「人教版」四年級下冊（頁 63）

探究三角形按角分類時的包含關係



圖 4：「人教版」四年級下冊（頁 64）

探究三角形按邊分類時的包含關係

### (3) 五年級下冊 長方體和正方體的認識

此時學生較低年級相比已經擁有較高的幾何認知能力，所以運用的提示性語句都為只給出非完整語句（「正方形是特殊的長方形，所以……」、「正方體的棱長度都相等，長方體相對的棱……」），即給出思考的方向，引導學生思考立體圖形面的關係（長方形包含正方形）以及棱的關係，進而給出溫氏圖，來表示長方體和正方體的包含關係（如圖 5）。



圖 5：「人教版」五年級下冊（頁 20）探究長方體和正方體的包含關係

將兩地三年級及四年級涉及平面圖形（三角形、四邊形）包含關係的內容進行對比，不難發現，香港「現代版」均採用「學習增值區」的版塊，給予教師和學生很大的選擇空間；而內地「人教版」則是將其放在正文部分，以較深入的溫氏圖來引導學生思考，而且習題當中對於包含關係也有所要求。綜合對比，「人教版」在該部分內容對於學生的幾何認知能力要求更高。

而層次三非形式化演繹期另外一個重要的特徵——通過非形式化演繹的方式尋找、歸納、推理或證明簡單的定理，兩地都有做出嘗試。「現代版」仍是以「學習增值區」的形式，「人教版」則是通過習題呈現的。但由於該階段的學生所具備的歸納和推理能力上不足以應對這個挑戰，所以教材中的活動都只是較為淺顯的涉及。

香港「現代版」6S1 立體圖形（四）——面、頂和棱的數目的關係（ $F + V - E = 2$ ），需要將三個量結合在一起分析，更大程度的鍛煉學生的推理能力和數據總結能力。但由於學生的幾何認知水平尚未足夠，所以表格中的 $F + V - E$ 已給出（如圖6），學生需要完成的只是填寫每一個立體圖形的面、頂和棱的數目，然後完成加減法，實際上對於學生的發現和歸納規律能力要求并不高。

**面、頂和棱的數目的關係**

看圖完成下表，再看看各立體的面的數目 (F)、頂的數目 (V) 和棱的數目 (E) 之間有甚麼關係。

立體	面的數目 (F)	頂的數目 (V)	棱的數目 (E)	$F + V - E$
五角錐體	6	6	10	2
六角錐體	7	7	12	2
五角柱體	7	10	15	2
六角柱體	8	12	18	2

圖 6：「現代版」6 上 A（頁 41）探究立體圖形面、頂和棱的數目的關係（ $F + V - E = 2$ ）

然而，如果換一種方式，以柱體作為例子，結合已有知識，即正文部分已經完成的探究——棱和底邊數目的關係（ $E=3 \times \text{底邊數目}$ ），頂和底邊數目的關係（ $V=2 \times \text{底邊數目}$ ），再加入面和底邊的數目（ $F=\text{底邊數目}+2$ ）。通過提問引導學生發現「 $F+V$ 」和「 $E$ 」的數量關係（多2），然後很容易引出「 $F+V-E$ 」的結果。之後可以不給出引導，請學生探究錐體的部分，可以迅速鍛煉及檢測剛剛習得的内容，而不是像現在這樣柱體和錐體混雜在一起。這樣的改變，一方面強化了學生對於兩個量的關係的認知，另一方面鍛煉了歸納能力。

而「人教版」，在習題中設計了很多初中階段才可以通過形式化演繹證明的公式和定理，比如「對頂角相等」（如圖7）和「平行綫之間同位角相等」（如圖8）。此階段僅需要學生通過動手操作（測量、拼砌等），之後推理得到相關定理，不需要給予標準的定義，可以算作層次三非形式化演繹期的一個例子。但值得注意的是，教學語言并不能同步進階，因為教師在現階段會謹慎引入「對頂角」和「同位角」這樣的數學名詞，但是如果仍然用形容性的詞彙，比如「那兩個角」，對於學生幾何認知的提升并無太大好處。

#### 4. 量出下面各角的度数。你能发现什么？

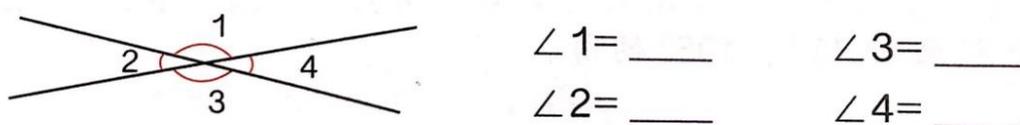


圖7：「人教版」四年級上冊（頁44）探究「對頂角相等」定理

13. 下图中， $a \parallel b$ ，量一量 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的度数，你能发现什么？

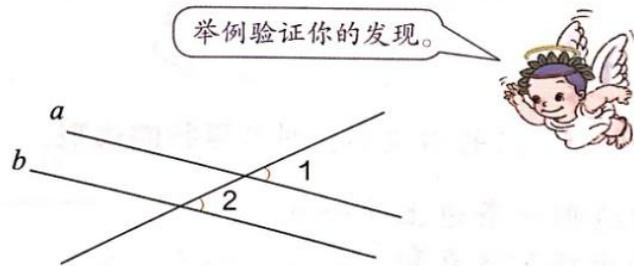


圖 8：「人教版」四年級上冊（頁 63）探究「平行線之間同位角相等」定理

上述的分析，探討了各知識點所需的幾何認知發展能力，是否符合該年級學生所具備幾何認知發展能力。而在照顧學生認知發展差異方面，筆者所提及的，「現代版」和「人教版」采取的相關措施，主要是針對認知發展處於領先地位，優先進入下一層次的學生而設置的提高環節。但對於大部分學生，如何掌握這些知識點，進而提升認知能力、步入下一層次；以及針對那些對於未達層次一視覺期、以及高年級階段仍處於層次一視覺期的學生，如何給予支持，則需要進一步深入分析兩地教科書內部具體的教學設計，包括教學活動、語言引導、習題類型等方面。

### 3. 欄目呈現

「現代版」和「人教版」的課題均以單元劃分，「現代版」（如表 9）會在單元內部在劃分課次并統一編號，而「人教版」（如表 10）只是以大標題來區分課次，并無劃分課次或賦予序號。兩地的每單元提供不同的活動欄目，其中左側的均為「一定且按順序出現」的欄目，右側的則根據課題需要選擇性提供。

表 9：「現代版」單元欄目設置

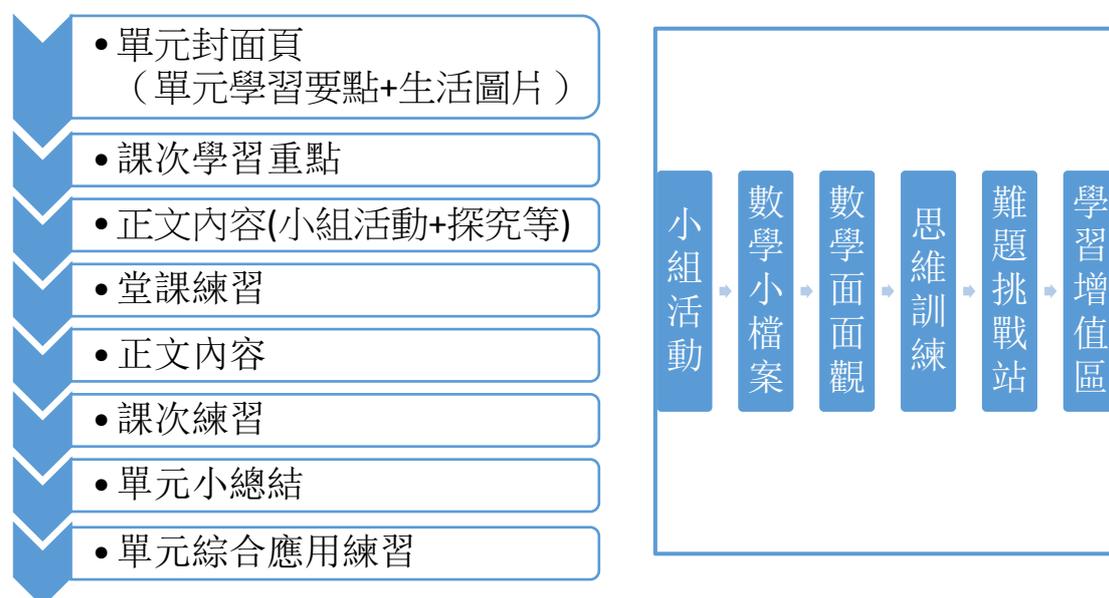
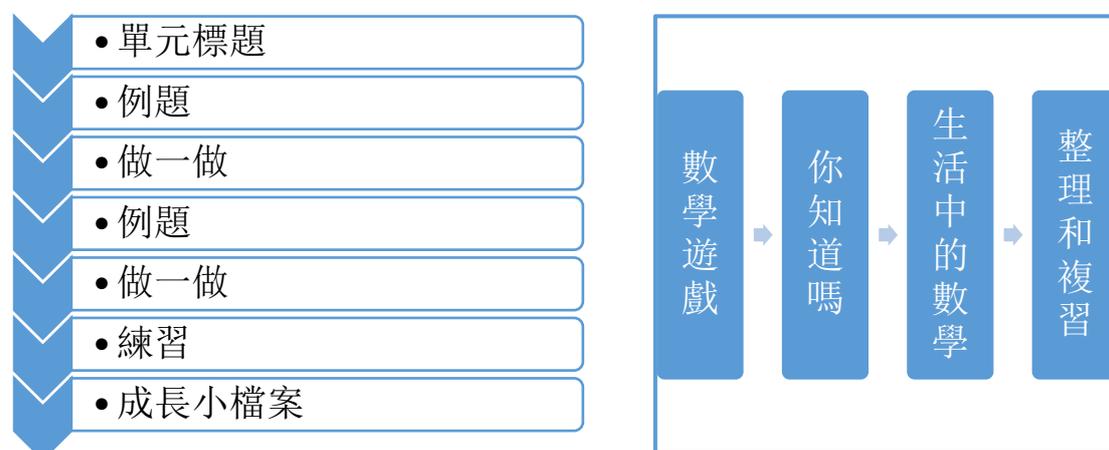


表 10：「人教版」單元欄目設置



其中「現代版」的「數學小檔案」和「人教版」的「你知道嗎」內容類型基本相同，均提供學生一些與課題有關的課外知識，比如歷史、藝術、科技等，提升學生的興趣，并讓學生全方位瞭解該課題。例如「數學小檔案」介紹了現今利用電腦計算圓周率到小數點後十萬億個位，而「你知道嗎」介紹了歐幾裏得的幾何學以及七巧板和指南針等歷史故事。學生可以從中感受到從古至今數學家的聰慧、敏銳以及對於數學堅持的態度，選取適當的數學史內容融入教學對於學生的數學學習態度也有正向的提升（陳建蒼和柳賢，2005；謝宗穎和蘇意雯，2010）。

而「現代版」的「數學面面觀」和「人教版」的「生活中的數學」，都是從數學在生活中的應用角度，讓學生瞭解數學的理論知識在實際生活中如何實踐和應用。例如「數學面面觀」在柱體的支架單元介紹了食鹽的晶體，在截面的單元介紹了切蛋器等；而「生活中的數學」在用數對表示位置的單元介紹了圍棋棋盤和經緯度，在長方體和正方體的體積單元介紹了乘飛機的行李尺寸規定等。

兩地均有各自獨特的欄目設計值得進行討論。首先是「現代版」的「學習要點和單元總結」，在單元封面頁以及課次首頁右上角，都會明確列出該單元和該課次的知識重點，而在單元結束後會以筆記形式的「單元小總結」梳理本單元的知識重點及脈絡。相比之下，「人教版」的「整理和複習」只在內容非常多的，超過三課次的單元才會給出。所以「人教版」對於開篇明確教學重點，課後總結做的並不如「現代版」一般清晰。但在總結單元收穫方面，「人教版」的獨有單元「成長小檔案」，以學生在單元結束時自行總結的方式，增強了學生對知識的自主理解和梳理。

「現代版」的「思維訓練」雖處於右側的一欄，但是一個出現率較高的欄目。這個欄目穿插在正文之間，以較為簡短的問題引發學生的思考，比如「一個三角形會有兩個直角嗎」、「哪一個角錐有十個側面」等，致力於培養學生的高階思維能力。相比之下，「人教版」并無類似欄目，只是在課次的練習中設置了星號(\*)題，作為較有難度的思考題鍛煉學生思維，但靈活度相比較差。

而「數學遊戲」欄目，兩地投入的比重都較少。古往今來，數學教育的理論和實踐都已證明遊戲對於數學學習是有極大的價值（任潔，2010）。數學遊戲因其具有的趣味性和廣泛參與性，能夠激發學生學習數學的興趣，調動學生學習數學的積極性（遊安軍，2005），令學生主動參與，表達自己的想法，自發的解決問題，并自己建構知識（Burns，2003）。所以筆者認為兩地的教科書應增加數學遊戲的比例，培養學生數學學習的興趣和動機。

將「現代版」和「人教版」進行總結對比（如表 11），可以看出，兩版教科書在「數學歷史」和「數學應用」等方面都給予了一定信息和資源；在知識總結方面，對於小學生來講，「現代版」詳細明確的筆記式總結較「人教版」開放度較高的自行歸納成長檔案，更有助於知識的歸納和複習；能力提升方面，「現代版」的「思維訓練」靈活度極高；而兩地在「數學遊戲」方面的比重都應加強。

表 11：「現代版」和「人教版」單元欄目設置的比較

	課外知識	生活中的應用	知識總結	能力提升	數學遊戲
現代版	數學小檔案	數學面面觀	單元和課次首頁開始，列出知識重點 單元小總結（單元結束）	思維訓練	無
人教版	你知道嗎	生活中的數學	只在超過三課次的單元才會給出 成長小檔案（學生自行總結）	練習中星號(*)題	較少出現

#### 4. 具體課節分析

該部分將以幾個課題為例，從教學流程、文本內容、活動設計等角度具體分析「現代版」和「人教版」的異同。

##### (1) 動手實作

因為小學生對某一事物的認識，需從大量感性、具體的材料中，經過感知、操作，並結合自己的生活經驗，逐步抽象，得到認知（陳清容&呂世虎，2006）。而形成空間表徵是經由學生自己的運作和內化活動逐步組織得來的，不是來自於「瀏覽」空間情境，而是來自於學生在主動操該空間情境時建立的經驗（Clements and Battista，1992）。因此小學階段的幾何學習，動手操作實物的機會就顯得格外重要。學生通過觀察、拼擺、摺紙、測量、作圖、製作等一系列動手活動，進行感知和體驗，積累經驗和認知，對圖形有更深入的認識。而林芳姬、姚如芬(2005)經教學後也發現，教學活動以具體操作進行教學，較能激發學童的學習興趣，也能使學童對於概念的學習有更深刻的印象。

兩地在不同的單元都有動手操作的環節。比如直觀認識立體圖形的時候出示大量的實物教具，運用直角探測器來檢測直角和比較角的大小，通過拉動平行四邊形和三角形的短棒教具來發現三角形的穩定性，採用各種方式（釘板、方格紙、竹枝和泥膠、摺紙等）製作平面圖形等。

不同的是，「人教版」的動手環節分散在正文、做一做和練習當中，而「現代版」的除了正文的探究活動外，會在認識新的圖形後安排一個課次獨立的製作，比如用不同方法製作直線和曲綫/平面圖形/立體圖形/角/四邊形/圓，利用摺紙圖

樣製作角柱和角錐，設計角柱的摺紙圖樣等等。學生可以更系統的嘗試用多種不同的方式去製作，進而認識圖形的特性。

然而和平時的練習和 TSA 等公開試中，採取的只是紙面考核，所以只可以考核學生「觀察試卷上的二維圖形」、「在紙面上畫圖形」以及「量度平面的圖形」等知識點。但其他的方式，如摺紙、泥膠、用直尺以外工具測量、使用指南針等，都不會被考核。所以因為課時緊張以及練習和紙筆考試中不會考察的緣故，學生能有多少機會嘗試和鍛煉動手操作的課題存在疑問。

## (2) 圓

在比較過程中，筆者認為，「現代版」較「人教版」更為細緻的展開教學內容，更加完整的體現知識的形成過程。這也回應了第一部分宏觀比較時，「現代版」的平均頁數是「人教版」的 1.6 倍，是否就意味著含有更多的教學內容的問題。其中「圓」的單元非常明顯的展現了這一特點。接下來，筆者將結合「現代版」6S2 圓的認識以及「人教版」六年級上冊圓的特徵部分做詳細對比。

「現代版」該課次「圓的認識（一）」的教學重點為：學會「圓心、半徑和直徑的意義」及「半徑和直徑的關係」。從圖中可以發現，教科書通過清晰的小標題，將該課次內容分為 1.圓心，2.直徑，3.半徑。在第一部分「圓心」的內容中（如圖 9-1），通過摺疊的動手操作確定圓心，並用語言描述這一過程和結果；之後通過堂課練習，幫助學生熟練掌握對摺確定圓心這一方法。第二部分「直徑」直接從第一部分中的摺痕發展開來（如圖 9-2），用記事貼的方式給出「圓周」和「直徑」準確的定義，通過填空的方式讓學生找出多條直徑，繼而通過量度活動和相關填空，引導學生發現「一個圓的所有的直徑都相等」以及「圓周上任意兩點所連成的綫，最長的是直徑」的定理（如圖 9-3）。第三部分「半徑」的介紹和探究與之前「直徑」的部分採取同樣的模式，最後將第二部分和第三部分的量度的結果結合起來，便可以發現「直徑的長度是半徑的 2 倍」的規律（如圖 9-4）。

可以發現，整個教學過程非常順暢而有序，一步步展開對於圓的認識，通過操作活動以及填空引導，學生可以較為輕鬆的探究出相關定理和規律。而定義、定理和規律等文字，也用底色非常鮮艷的記事貼做出突出。這是一個非常完整的

知識展開、呈現、相互關聯以及總結的過程。

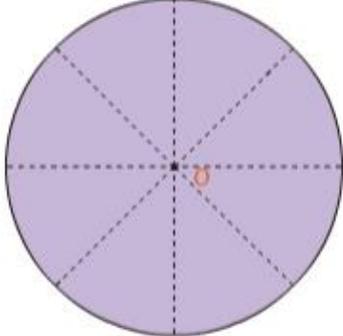
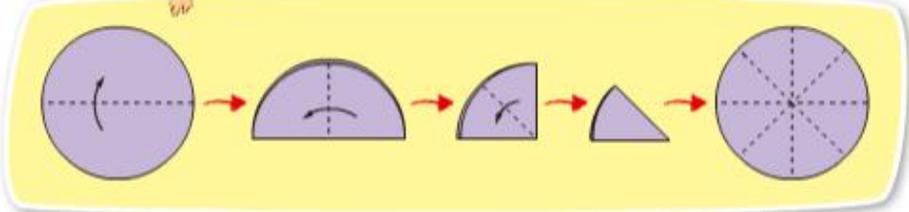
# 4 圓的認識 (一)

我會學懂

1. 圓心、半徑和直徑的意義。
2. 半徑和直徑的關係。

1 圓心

我把圓形紙這樣對摺三次，然後把紙張開。



每條摺痕都把圓等分成兩份，而且這些摺痕相交於圓內的一點，這一點稱為 **圓心**，一般用大楷英文字母 **O** 表示。

數學小檔案

早期很多研究幾何及天文學的學者，都認為圓是「神聖」及「完美」的。

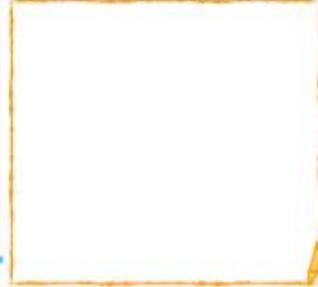
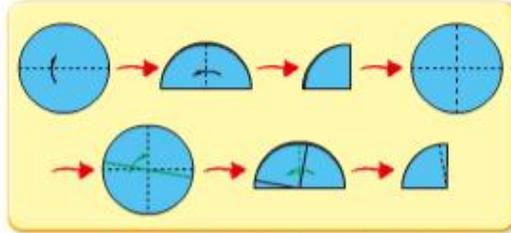


32

圖 9-1：「現代版」6 下 A（頁 32）「圓的認識」探究過程

答案

- ① 從剪貼頁 (p. 75) 剪出圓形紙，對摺兩次後改變方向再對摺，如下圖所示。把紙張開並貼在下面。

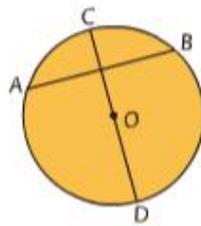


答案

這些摺痕也相交於圓心嗎？

答案

②

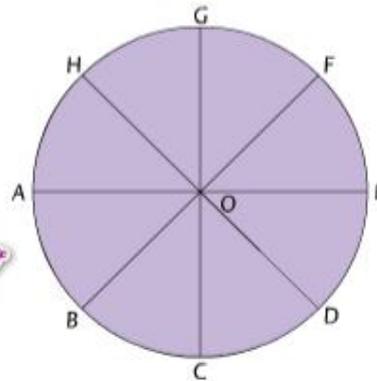


左圖中，為甚麼 AB 和 CD 的相交點不在圓心 O 上？

## 2 直徑

- ① 靈兒把圓形紙上的摺痕畫出來，如右圖。  
A、B、C、D、E、F、G 和 H 都是在圓的周界上的點。

圓的周界，稱為 **圓周**。  
通過圓心且兩端都是在圓周上的一段直線，稱為圓的 **直徑**。

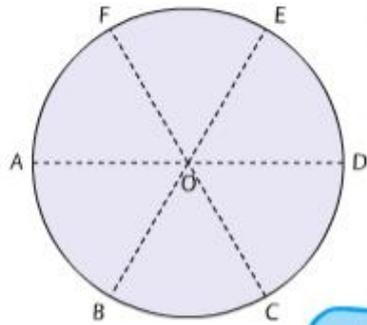


答案

所以，AE、\_\_\_\_、\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_ 都是這個圓的直徑。

圖 9-2：「現代版」6 下 A（頁 33）「圓的認識」探究過程

2 利用直尺，量度下面圓的直徑。



答案

AD 長 \_\_\_\_\_ cm。

BE 長 \_\_\_\_\_ cm。

CF 長 \_\_\_\_\_ cm。

答案

你有甚麼發現？

一個圓的所有直徑的長度都相等。



3 來看看右圖，圖中的 O 點是圓心。

答案

a 依以下次序比較各段直線的長度：

RS → RT → RU → RV

各段直線愈來愈（長 / 短）。

答案

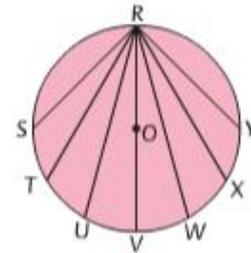
b 依以下次序比較各段直線的長度：

RV → RW → RX → RY

各段直線愈來愈（長 / 短）。

答案

最長的一段直線是 \_\_\_\_\_，這條直線通過圓心，是這個圓的 \_\_\_\_\_。



答案



你能在這個圓中畫出一條比直徑長的直線嗎？

圓周上任意兩點所連成的直線，最長的是直徑。



歡學小檔案

在中國古代，有人提出「地像棋盤一樣方的，天像圓蓋一樣蓋在地面上」。這就是所謂的「天圓地方」的蓋天說法。



34

圖 9-3：「現代版」6 下 A（頁 34）「圓的認識」探究過程

### 3 半徑

1 再來看看 p. 34 題 2 的圖形：

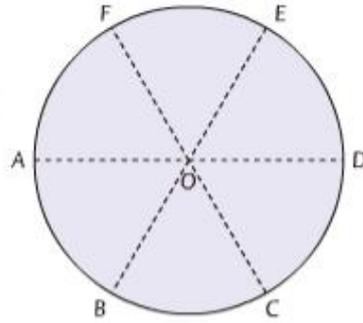


a



連接圓心和圓周上任何一點的直線，稱為圓的半徑。

所以，OA、OB、OC、\_\_\_\_、\_\_\_\_  
和 \_\_\_\_ 都是這個圓的半徑。



b

利用直尺，量一量這個圓的半徑。

OA 長 \_\_\_\_ cm。 OD 長 \_\_\_\_ cm。  
OB 長 \_\_\_\_ cm。 OE 長 \_\_\_\_ cm。  
OC 長 \_\_\_\_ cm。 OF 長 \_\_\_\_ cm。



你有甚麼發現？

一個圓的所有半徑的長度都相等。



2 根據 p. 34 題 2 及以上量度的結果，可以發現：直徑的長度是半徑的 \_\_\_\_ 倍。

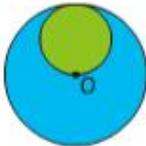
直徑 = 半徑 × 2 或 半徑 = 直徑 ÷ 2



### 堂課練習



1



左圖中，O 點是大圓的圓心。

大圓 \_\_\_\_\_ 的長度與小圓 \_\_\_\_\_ 的長度相等。

2

右圖中，AD 和 CF 都是圓的直徑。



(a) \_\_\_\_\_ 點是圓心。



(b) HF 是圓的 \_\_\_\_\_。

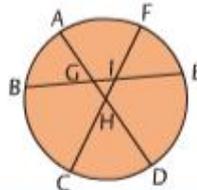


圖 9-4：「現代版」6 下 A（頁 35）「圓的認識」探究過程

相比之下，「人教版」運用的篇幅就較為有限（如圖 10）。在不到一頁的範圍中，先是直接給出了圓心、半徑和直徑的定義和符號；然後通過下方的活動，要求學生「沿著直徑摺一摺，畫一畫，量一量」，從中發現規律，然而並沒有給出一定的空間來記錄相關的數據和發現；圖中五個角色的對話給予了學生方向上的引導，但他們之間的關係是并列的而非遞進的，最下方小精靈提出的問題，學生也較難用準確的數學語言去回答。可以說，相比於「現代版」的嚴謹有序，「人教版」需要教師付出更多心思去設計課堂活動以及相關的工作紙等來配合教學目的。



圖 10：「人教版」六年級上冊（頁 58）「掌握圓的特徵」探究過程

整體來講，「現代版」更加細緻和完整的展現了整個探究和知識形成的過程，用活動和填空引導學生發現，並給出清晰的定義和定理總結。但需要注意的是，定義和定理相當於已經給出的結論，學生很可能參考定理填空，而不是完成每一次量度，自行發現規律。所以定理和規律的部分，也可以通過填空的方式給出。而「人教版」整體設計較為簡略，給出了定義和探究的引導，但需要教師準備更多，所以對於教師來講，獲得的支撐和幫助較少，但設計課堂的空間較大。同時，並未給出的結論，也可促進學生的探究，但筆者認為整體上「人教版」應提供更多的引導和書寫的空間。

### (3) 方向

兩地在方向的單元都給出了大量的平面圖，包括很多貼近生活的場景，比如校園、街區、動物園等。圖片設計精美，十分具有吸引力，可以提升學生興趣，同時給予學生足夠的範例來積累經驗，熟悉方向單元知識的運用。

而實際生活中真實存在的場景的地圖也均為兩地採用的教學資源，「現代版」5S1 八個方向運用了港鐵路綫圖（如圖 11），「人教版」三年級下冊位置和方向（一）運用了北京天安門建築群的實景圖和地圖（如圖 12）。這些真實場景在一定程度上可以令學生感到親近，讓他們用所學知識驗證生活中的例子。



圖 11：「現代版」5 上 A（頁 10）八個方向運用港鐵路綫圖

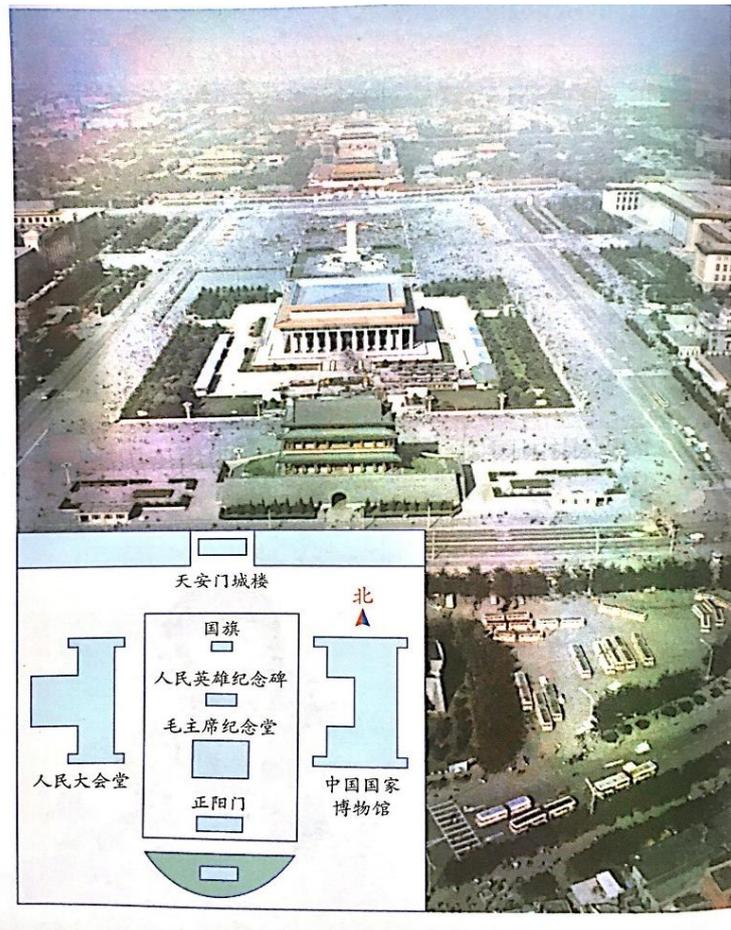


圖 12：「人教版」三年級下冊（頁 2）位置和方向（一）

運用北京天安門建築群的實景圖和地圖

然而對於大多數香港的小學生來講，他們熟悉的只是某一段港鐵圖，而住在學校附近街區的學生以及跨境學生，對於港鐵圖的認知就相對薄弱。「人教版」方面，該書供內地多個省市使用，而北京以外省市的小學生，處於幾乎都聽過天安門，但少有親身造訪的經歷的局面，所以「中軸綫」以及北京的道路走向對他們來講較為陌生。所以這些看似貼近生活的實景，對於小學生來講可能和其它虛擬的平面圖無甚分別。

真正最為貼近小學生實際生活的，應該是他們的學校內部的環境及所處的街區，比如學校內部的圖書館、操場、禮堂，學校旁邊的港鐵站、巴士站、便利店、超市等，這些他們每天都在經歷和體驗的場景。如果教科書可以設計相關的活動，

令教師以學校周邊為基礎進行實地測量（用指南針）或是設計題目，學生應該會更加熟悉也更有興趣，并能調動已有的經驗和認知。同時，這樣的課程設計更能貼合每一間學校的實際情況，為校本課程提供素材。

#### (4) 單元之間的關聯

數學知識的應用是一個值得關注的話題，目前教科書在素材的選取上、習題的設計上，都盡可能出于靈活運用數學知識的考量，避免單調的死記硬背。但除此之外，數學知識之間的相互應用也值得注意。

由於香港的課程指引中，「度量」和「圖形與空間」是兩個獨立分開的範疇，這就導致周界、面積和體積這些算在「度量」範疇內的課題與平面圖形和立體圖形這些算在「圖形與空間」的課題是分開的。而在內地的課程大綱中，在「圖形與幾何」這個大的範疇下，再細分為「圖形的認識」「測量」「圖形的運動」「圖形與位置」四個分支，所以課程的編排上可以有一定的綜合性。

以「周界」單元為例，「現代版」在二下 **B** 初步學習長方形和正方形的特性，四上 **A** 全面學習長方形和正方形的特性以及梯形和菱形的特性（但此時的學習重點是梯形和菱形），四上 **B** 的教材才在介紹周界的單元，介紹長方形和正方形的周界，所以長方形和正方形的特性和周界是分開學習的。而「人教版」在三上系統學習長方形和正方形的特性後，繼而以它們為案例學習周長的定義，并研究長方形和正方形周長的公式。在這個相繼學習的過程中，剛剛習得的「長方形對邊相等」以及「正方形四邊相等」的特性便於學生更好的發現規律和總結周界公式，而對於周界的計算和應用也反過來強化和鞏固了學生對於圖形特性的認知。

「體積」單元也存在類似的情況。「現代版」在五下 **A** 全面研究了各種立體圖形，并就正方體和長方體的折紙圖樣進行詳細研究，之後五下 **B** 才在體積的單元研究了長方體和正方體的體積。而「人教版」則在五下系統學習過長方體和

正方體的特性後，繼而介紹了他們體積和表面積的計算方法，是對於特性的應用與強化。

數學知識彼此之間的應用，也是一種強化認知和加深理解和記憶的方式，所以「現代版」可考慮打破知識範疇的壁壘，從藉助數學知識之間的聯繫、更好的應用數學知識的角度來安排課程。

## (5) 「非標準」圖例的呈現

在幾何內容的學習中，教科書對於幾何圖形的呈現十分重要。學生在觀察和體會多種多樣的幾何圖形的範例中吸取經驗，加深對於圖形的認知。其中，非標準化、非常態化的圖例就十分重要。如果只是呈現最正常、最標準的圖例，比如標準的正方形「□」，學生只能辨認這樣的正方形，對於旋轉 45° 以後的，就只會視作菱形，而不會聯想到正方形。所以，接下來，筆者將對「現代版」和「人教版」幾個圖形所採用的圖例進行比較分析。

### (i) 平面圖形的直觀認識

「現代版」1S3 平面圖形和「人教版」一年級下冊認識圖形（二）都是對於平面圖形進行直觀認識（如表 12）。「現代版」先是介紹三角形、四邊形、五邊形、六邊形和圓，可以看出有不同狀態下的圖例，而之後對於長方形和正方形的重點介紹，也有大小不一、傾斜放置的圖例。

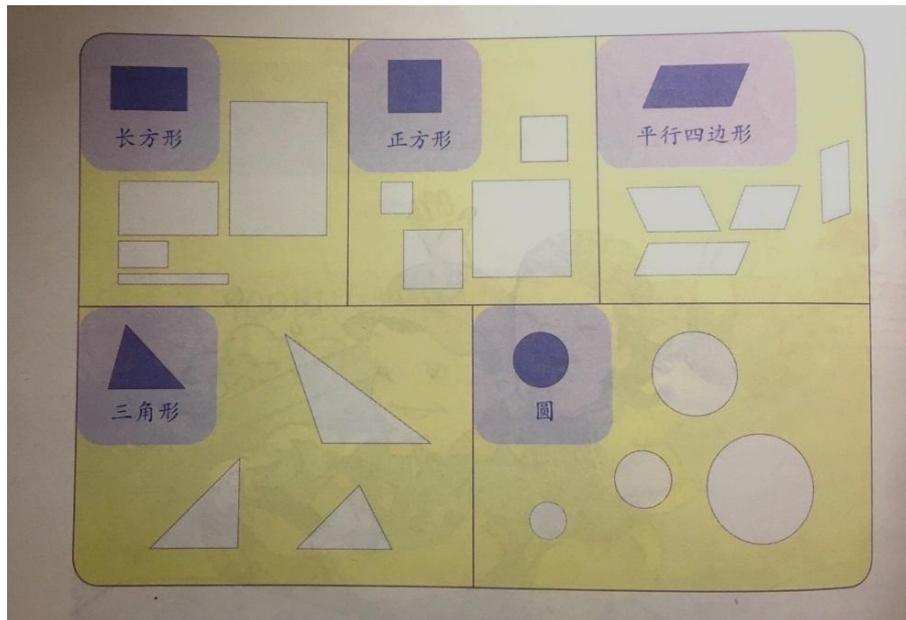
「人教版」在正文部分的內容都是標準狀態下的圖形：正方形和長方形是水平放置的，平行四邊形是水平或豎直擺放的，三角形的一條邊水平、整個三角形的剩餘部分都在在這條邊上方。但習題中的例子出現了大量非常規放置的圖形，需要學生格外注意。

在此單元中，「現代版」和「人教版」都對每種平面圖形展示了多種標準狀態和非常規狀態的圖例，幫助學生積累經驗。然而，相比於「現代版」的習題大多是對於正文內容的強化，「人教版」經常在習題中添加正文以外的內容，需要教師加以講解。

表 12：「平面圖形的直觀認識」的比較

<p>「現代版」 1S3 平面圖形</p>	<div data-bbox="406 302 1093 1243"> <p>2</p> <p>來看看以下不同的平面圖形。</p> <p>三角形</p> <p>四邊形</p> <p>五邊形</p> <p>六邊形</p> <p>圓形</p> </div> <p>「現代版」1下B(頁71)</p> <div data-bbox="422 1377 1356 1825"> <p>這些四邊形都是正方形。</p> <p>這些四邊形都是長方形。</p> </div> <p>「現代版」1下B(頁75)</p>
-------------------------------	--

正文：



「人教版」

一年級

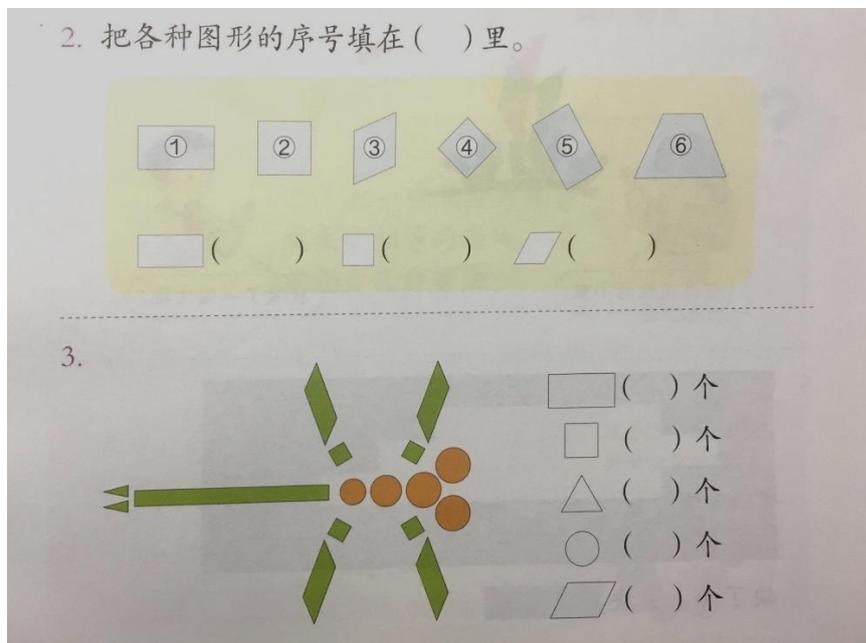
下冊

認識圖形

(二)

「人教版」一年級下冊（頁 2）

練習：

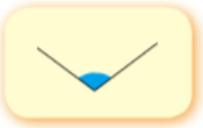


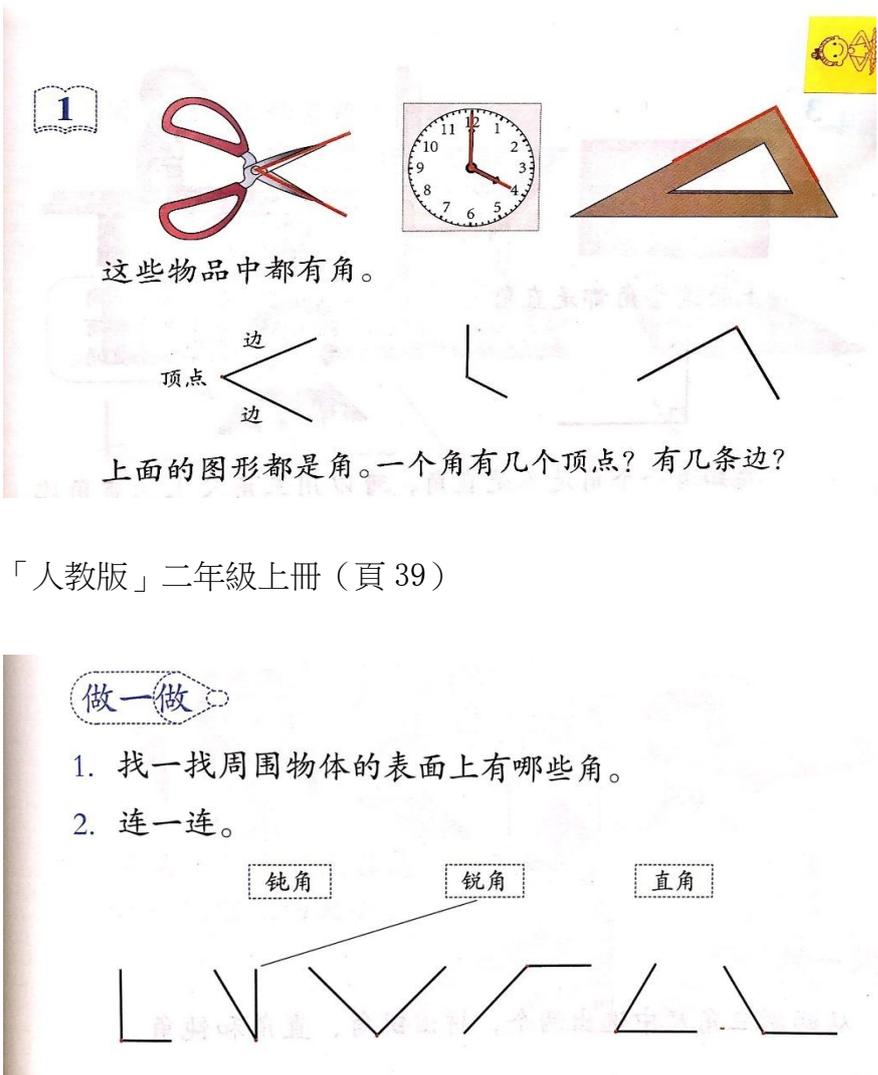
「人教版」一年級下冊（頁 5）

(ii) 角的認識

「現代版」2S2 角（一）和「人教版」二年級上冊角的初步認識，都是以認識角和比較角的大小作為教學重點，其中當然需要呈現大量角的圖例。從對比中可以看出（如表 13），「現代版」給出的角基本都為兩邊長度相等；很多例子一條邊為水平，另一條邊在其逆時針方向；相比較的角的開口方向一致，第二幅圖中的是教科書中為數不多的角的開口方向不同的例子。而相比之下，「人教版」的圖例就非常豐富，角的開口方向，邊的長度都不相同。這樣豐富的圖例，在一定程度上可以避免學生以邊的長度作為角的大小的判斷依據，不同的開口方向也使學生很難用視覺直觀判斷，「逼迫」學生必須藉助工具完成嚴謹的比較程序。

表 13：「角的認識」的比較

<p>「現代版」 2S2 角 (一)</p>	<p>①  比直角（大 / 小）。</p> <p>②  比直角（大 / 小）。</p> <p>③  比 （大 / 小）。</p> <p>④  比 （大 / 小）。</p> <p>⑤  比 （大 / 小）。</p> <p>「現代版」2 上 A（頁 64）</p> <p>把以下各題中較小的角圈出來。</p> <p>①  ② </p> <p>「現代版」2 上 A（頁 66）</p>
--------------------------------	--

<p>「人教版」 二年級 上冊 角的初步 認識</p>	 <p>1</p> <p>这些物品中都有角。</p> <p>顶点 边 边</p> <p>上面的图形都是角。一个角有几个顶点？有几条边？</p> <p>「人教版」二年級上冊（頁 39）</p> <p>做一做</p> <p>1. 找一找周围物体的表面上有哪些角。</p> <p>2. 连一连。</p> <p>钝角 锐角 直角</p> <p>「人教版」二年級上冊（頁 41）</p>
---	---

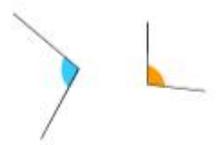
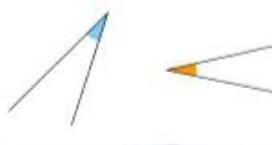
但「現代版」來到 3S3 角（二）單元時，對於角的認知要求加深，圖例也就開始豐富起來（如圖 13）：有十分接近的角，來考察學生比較角的大小的能力；角的開口方向，邊的長度也不再標準化和固定。可以看出，「現代版」的課程安排非常強調螺旋式上升，包括之前提到的 2S1 和 5S2 立體圖形單元內容逐步加深但重合度較高，以及當前的角的單元。但是，課程時間和空間有限，所以要避免過多的重合和重複，在保證學生回顧和加強已有知識的同時，也要充分的拓展

新的知識。

堂課 練習

圖出較大的角。

①  ② 

③  ④ 

你使用哪種方法來比較這些角的大小？



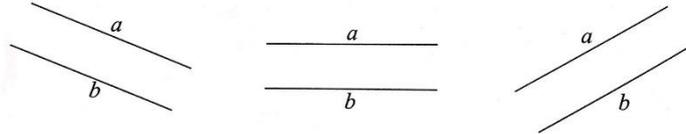
圖 13：「現代版」3 下 A（頁 69）角（二）圖例

(iii) 平行線的認識

「現代版」3S1 平行和垂直以及「人教版」四年級上冊平行四邊形和梯形都引入了認識平行線的知識點，從圖例的對比中可以很清晰的看出（如表 14），

「現代版」的圖例展示了多種可能性，不只局限於一組水平的、長度相等、上下對齊的平行線，而是有長度不一、超過兩條、需要延長等多種非標準圖例，然而這些圖例則是實際應用非常常見的。而人教版的圖例就較為標準化，沒有太多的拓展，也就不能給予學生足夠的引導。

表 14：「平行線的認識」的比較

<p>「現代版」 3S1 平行和垂直</p>	<p>3 來看看下圖中每種顏色的線都分別是一組平行線。</p>  <p>「現代版」3 上 B（頁 63）</p>
<p>「人教版」 四年級上冊 平行四邊形和 梯形</p>	<p>在同一个平面内不相交的两条直线叫做<b>平行线</b>，也可以说这两条直线<b>互相平行</b>。</p>  <p>上图中 <math>a</math> 与 <math>b</math> 互相平行，记作 <math>a // b</math>，读作 <math>a</math> 平行于 <math>b</math>。</p> <p>「人教版」四年級上冊（頁 56）</p>

(iv) 梯形的認識

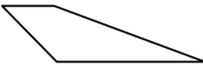
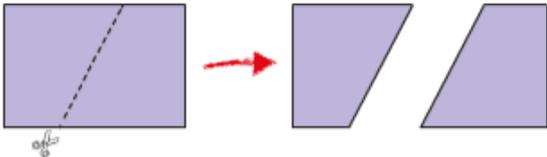
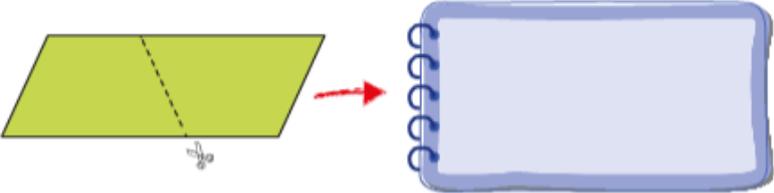
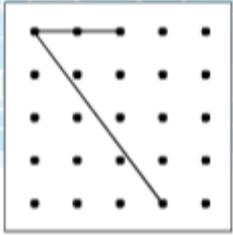
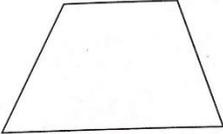
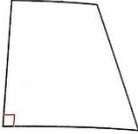
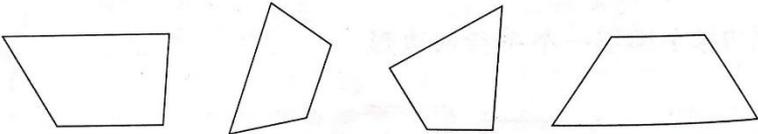
「現代版」的 4S1 四邊形（三）單元和「人教版」四年級上冊平行四邊形和梯形單元對於梯形從特性層面進行認知。兩冊教科書都给出了一些梯形的圖例（如表 15），有直角梯形和等腰梯形，有傾斜放置和倒立放置的（上底比下底長）。但是對於一個特殊的情況——，即一條高在梯形外部的情况都未给出圖例，「現代版」只在一道釘板練習題中有些許涉及。但這個并不是標準的「像梯子一樣」的梯形，却是對於梯形的特性「只有一組對邊平行」很好的強化。如果能夠判斷出這個圖形是梯形，可以說學生主要通過特性層面而不是視覺層面進行判斷，因為它看上去并不像傳統的標準的梯形。

表 15：「梯形的認識」的比較

<p>「現代版」 4S1 四邊形（三）</p>	<p>1 利用一張長方形或正方形紙，依如下方法可剪出兩個梯形。</p>  <p>2 從貼紙頁 1 取出平行四邊形貼紙 ，如下圖般依虛線剪開，然後把其中一個剪出的圖形貼在空位內。</p>  <p>「現代版」4 上 A（頁 62）</p>
---------------------------------	---

	 <p>「現代版」4上A (頁63)</p>
<p>「人教版」 四年級上冊 平行四邊形和 梯形</p>	<p>两腰相等的梯形叫做 <b>等腰梯形</b>。 有一个角是直角的梯 形叫做<b>直角梯形</b>。</p>  <p>等腰梯形</p>  <p>直角梯形</p> <p><b>做一做</b></p> <p>下面哪些图形是梯形？画出每个梯形的高，分别指出它们的 上底、下底和腰。</p>  <p>「人教版」四年級上冊 (頁66)</p>

## 六、 相關改進建議

### 1. 課程指引的修訂及靈活運用

前文探討了 van Hiele 的幾何認知水平，只有知識點對於認知水平的要求與學生具備的認知能力相符合時，學生才能更好的理解和掌握相關內容。然而教科書參照課程指引編寫，清晰明確的課程指引是編寫的依據。故而課程指引應該採用嚴謹準確的指令，明確每一階段學生需要達到的程度，比如直觀地辨認角柱和角錐是否需要掌握到三角柱體和五角錐體的具體命名，比較各種四邊形的特性是否需要探究他們之間的包含關係等。

而教科書的編寫雖然依據課程指引，但仍有一定的發揮的空間來靈活運用。首先要照顧發展能力較弱的學生，比如前文提到的未進入層次一視覺期以及高年級仍處於層次一的學生。另外，採用分層次的鋪排以及選教科目，來提升學生的認知發展。

### 2. 跨學科合作及校本課程

簡心怡和蕭嘉璋（2006）的研究顯示，學生認為有創意的數學教法，其中一點就是“與其他科目協同教學”。偶爾結合其他科目，趣味性提高了，還能同時學到不同科目的知識。而幾何部分豐富的圖形及動手操作活動，為跨學科教學搭建了良好的平臺。

為了給予跨學科合作更有利的條件，首先在課程指引的制定上，不同學科之間存在相關度的單元，應在不違反學生能力發展水平的基礎上，盡可能的安排在同一學期。之後，學校和教師可根據課程指引的相關要求，設計校本課程或共同

授課單元。比如數學科和視藝美勞科的結合，學生在數學課上學習了「對稱」的內容，在視藝課上就可運用相應的知識嘗試剪紙和對稱油印等。數學課、常識科和中文科，可在「方向」的單元，設計共同授課，與常識科的認識指南針、GPS等導航儀；中文科的認識校園和周邊并用文章記錄等相結合。

教科書方面，應給出一些可能的協同授課指導建議，同時更重要的是，給出教師根據實際情況自行設計的空間。一個教師在教學中若能真正尋找出學生的共同生活經驗，以此設計教學活動，則可以更大程度地促進學生數學化的思考，達到數學學習的效果（林碧珍，2003）。在一個班級的教學中，學生共同經驗過的情境就是共同的生活經驗，就是真實的情境，就是教師在設計課堂時需要參考的。而學校獨特的地理、人文和學習環境，就是學生共同的生活情境和生活經驗。比如教師帶領學生實地測量（用指南針），或是根據自己學校及周邊繪製的平面圖完成相關題目，學生應該會覺得更加熟悉，進而調動已有的經驗和認知。同時，這樣的課程設計還能與校本課程相結合，與其他科目相結合，真正做到貼合每一間學校的實際情況。

### 3. 提示性信息和總結

「現代版」和「人教版」在引導和總結上存在一定差異，「現代版」應延續現在完整展現知識形成過程的特點，但是避免將所有信息給出，令學生不再思考。而「人教版」應在一定程度上增加篇幅，設置合理的流程和順序，并在每一個活動中留給學生空間記錄和總結。「人教版」雖然采取了「成長小檔案」的方式，但對於小學生來講，還是需要教科書給予一定的知識點的梳理和總結，幫助他們更好地掌握。

#### 4. 引入動手實作及互動考核

傳統的紙筆考試，存在一定的局限性。比如在低年級階段，通過紙面題目考核立體圖形，實際上是將立體化爲平面，具體化爲抽象的過程，需要學生有較高的認知水平。考核角的大小比較時，如果學生不被允許帶入紙筆以外的工具，那相關的比較程序就無法實施，對於大小接近的角無法判斷，試卷只能考核大小差異較大的角，實則是考察學生層次一視覺直觀認識的能力，導致比較的操作程序形成欲考的却不能考的困局（馮振業，2013）。

只設立紙面考核，在一定程度上造成教師因趕進度以及針對性應付考試，減少給學生動手操作的機會。故而教科書及其配套練習，以及公開考試中，都應增加動手操作考核的方式，創造類似 DSE 中文科和英文科中的口試，IELTS 的口語和其他考試中的面試等類型的實作和互動考核。因爲現今兩地仍爲考試型主導，所以引入這類可以刺激和提升師生對於動手操作積累經驗的重視程度。但在設計時仍要考慮如何避免學校應付考試過度操練，應使考試盡可能成爲驅動發展的推動力。

比如在學校內部考試或日常測評中，當低年級的學生還未能充分發揮抽象思維時（不能根據立體圖形在平面的圖片來判斷），可讓學生通過多角度觀察及觸摸實物教具，來挑出柱體/錐體或特定立體圖形并完成相關題目。而量度的環節，現階段也僅限于紙面，那麼可以被檢測的工具就只有直尺；而捲尺、滾軸等工具，也可以通過實際操作的方式，來檢測學生掌握情況。對稱的部分，一般爲在釘點紙或方格紙上或沿對稱軸畫出，可以用面試考察學生的剪紙能力，比如剪出給定圖案的剪紙。指南針的運用方面，可在一間房間內的不同方位放置多個立體圖形

或公仔，考核學生利用指南針，判斷某件物體在自己的什麼方向或是獲取位於自己某個方向的物體。

正方體和長方體摺紙圖樣對於一些同學也過於艱深，只憑紙面觀察，可能無法建立空間感，也可以考慮用面試的方式來考核。但是仍然要區分有抽象認知的學生，因為現階段有些同學是可以做到的。可以考慮先由卷面考核，請學生給出答案，再通過動手，給出第二個答案，綜合計算分數的方式。

## 5. 培養學生欣賞和喜愛數學

現今的數學教學，我們往往只注重傳授實用的數學知識和技能，掩蓋了數學作為文化活動、培養學生文化素養的面目。導致學生容易將數學視作現成的公式和定理、枯燥的計算和操練（蕭文強，1992），真正喜歡數學的學生越來越少。在國際性的 PISA 和 TIMSS 考試中，香港學生成績名列前茅，却沒有呈現出與優異成績所匹配的對於數學的興趣和自信心。

筆者認為，教科書應加強數學歷史、數學應用、數學遊戲方面的比例，讓學生認識到數學這門學科的廣度和闊度，瞭解古往今來的數學智慧、數學對於生活方方面面的幫助，讓學生能夠欣賞和喜愛這門學科。而增加相關欄目的比例並不意味著呈現和堆砌大量內容，畢竟教科書的空間有限。而是應該結合電子教學和教科書配套資源，推薦相關的網站和書籍，是學生在教師的引導而不是單向灌輸下，自發地去探索自己感興趣的內容。

## 6. 增加非標準化圖例

在幾何的學習中，學生需要通過觀察大量圖例來積累經驗，進而加深對於圖形的認識。故而在先以標準化圖例引入圖形後，教科書應給予大量的非標準化圖例來幫助學生全方位的認識該圖形。一些特殊的圖例，還可以強化或迫使學生走出僅依靠視覺直觀判斷的層面，真正運用特性或是具體程序來探究圖形，這也是幾何認知水平由層次一視覺期進入到層次二分析期的過程。

## 七、 總結與展望

### 1. 研究結論

是次研究選取「現代版」和「人教版」作為香港和內地小學數學教科書的研究對象，採用比較研究法，對兩個版本的教科書從宏觀比較、認知發展、欄目呈現和具體課節分析等幾個角度進行比較分析。

宏觀比較方面，兩地都採用教科書審查制度，「現代版」和「人教版」均位列由教育局或教育部給出的適用書目表當中。相比於「人教版」在內地佔據絕對主導的市場地位（市場佔有率達 50%），香港教科書市場競爭激烈，市場化程度高。製作方面，「現代版」的紙張和印刷技術品質更高，故而教科書的價格也是遠遠超出「人教版」。而年均的頁數統計，「現代版」是「人教版」的 1.6 倍左右。

認知發展方面，筆者主要採用 van Hiele 學派關於幾何認知發展的理論，綜合近年來多地大量研究，總結得出學生的幾何認知平均程度，大體符合一、二年級處於「層次一視覺期」、三至五年級處於「層次二分析期」、六年級處於「層次三非形式化演繹期」的層次階梯。根據相關判定描述和標準，對「現代版」和「人教版」各年級幾何知識重點做出劃分。歸納得出，兩地的教學重點安排基本符合上述幾何認知發展階梯，「現代版」大量引入層次二分析期知識點的時間為二年級下學期，較「人教版」略早一個學期。兩個版本的教科書都有一些教學安排值得商榷，但對於同一年級學生存在的幾何認知水平差異，以及幫助學生進入下一幾何認知層次，兩地也都採取了多種措施。「現代版」主要以供選教的「學習增值區」來引入一些進階內容，而「人教版」則是通過引導性語句、溫氏圖以及探究性習題來幫助學生逐步接觸下一認知層次的內容。

欄目呈現方面，「現代版」和「人教版」均以單元劃分，在單元內部都有固定欄目和選擇性欄目。兩版教科書都從「數學歷史」和「數學應用」等角度來完善和深化學生的學習；而在知識總結方面，「現代版」採用筆記式總結，「人教版」採用學生自行歸納成長檔案，相比之下，「現代版」詳細系統的筆記更有助於小學生歸納和複習；能力提升方面，「現代版」的「思維訓練」問題巧妙、靈活度極高；另外，兩地都應適度增加「數學遊戲」的比重。

具體課節分析方面，首先，兩地都注重動手操作，令學生在實際中積累經驗，進而提升認知。不同於「現代版」獨立的製作課次，「人教版」的動手活動穿插在正文、探究和習題中。之後，通過對「圓」的單元的具體比較，可以發現，「現代版」比「人教版」更為細緻全面地展開知識的形成和發展過程，更加完整地引導學生逐步探究。「方向」的單元，顯示出兩版教科書都嘗試採用實際生活中的地圖作為素材，但仍與學生共同的生活經驗有一定差距。另外，「人教版」在單元知識關聯上，體現出數學知識內部的相互運用，而「現代版」受限於香港課程指引中，「圖形與空間」和「度量」範疇的各自獨立，關聯度較弱。最後，筆者對於幾個單元的圖例進行具體分析，「現代版」和「人教版」在不同單元都加入了「非標準」圖例來拓展和強化學生對於圖形的認知。

基於上述研究結果，筆者提出了自己的建議。首先是要對課程指引做出修訂，學習重點出現的時間點要符合學生的幾何認知發展，而課程指引要對學習重點做出具體而嚴謹的表述，列明學生需要達到的程度；教科書要嚴格遵循課程指引進行設定，但仍要靈活利用較大的空間進行自主發揮，照顧發展較弱的學生，以及幫助學生較快步入下一認知層次。另外，教科書的設計要給出空間和指導，便于教師引入學生共同經驗過的真實生活情境，進而與校本課程相結合，與其他學科

協同教學，盡可能切合不同學校的實際情況。

在欄目設置上，「現代版」應繼續完整地呈現探究知識的過程，而「人教版」則要增加引導和提示；在單元總結方面，「人教版」除採取學生自主總結學習收穫外，還應提供類似「現代版」詳細清晰的總結筆記，供小學生歸納和複習；此外，兩版教科書應重視培養學生數學文化素養以及對於數學的興趣，加強數學歷史、數學應用、數學遊戲方面的比例，并與電子化資源相結合，提供學生更多自主學習的信息和資源。

教科書還應採用非標準化圖例和動手操作活動，來幫助學生積累幾何方面的經驗和認知。圖例的選用角度，在先以標準化圖例介紹圖形後，教科書應增加非標準化圖例的提供，幫助學生全方位的認識該圖形；并通過特殊圖例來強化學生「以特性判斷圖形」的能力。教師應盡量多提供學生觀察、操作、製作實物的機會。另外，無論是校內還是校外大型公開考試中，應加入動手實作考核的模式，來補充紙筆考試所不能涉及的內容。

## 2. 研究局限

van Hiele 理論認為，不同地區不同年級的學生存在不同的幾何認知能力，所以筆者在研究初始時希望對兩地多間學校各年級學生做 van Hiele 認知能力測試。但很遺憾筆者未能聯繫到多間使用「現代版」和「人教版」的學校，願意提供一至六年級各年級學生進行測試。筆者能收集到的數據過少且不具代表性，所以本研究在學生幾何認知層次方面並沒有原始數據。但筆者閱讀了近年來多地區大量的相關研究，將其中的研究數據進行分析和總結，所以也是非常全面的。

而研究對象方面，因篇幅和資源有限，所以筆者僅選取了兩地各一版較具有代表性的教科書作為研究對象，即香港「現代版」和內地「人教版」，並購買了全部學生用書和教師用書。選取這兩版教科書，雖然不能全面的代表兩地的小學數學教科書，但正如前文分析的，「現代版」為香港五大出版社之一，且筆者實習的兩間學校都使用這版教科書；而「人教版」在內地的市場份額超過一半，所以兩者都是較能反映當地小學數學教科書的研究對象。

### 3. 未來研究方向

筆者一直對數學課程和教學方面有濃厚興趣，在這次寶貴的研究機會中，也發現了很多方向可以進行深入研究。在之後的研究生課程中，筆者還將致力於數學課程和教學法方面的相關內容，對是次研究中發現的方向，做進一步探討。

比如 van Hiele 幾何認知水平層次方面，香港地區學生相關數據較為稀缺，相關研究較少。筆者希望能夠通過問卷和訪談等形式，統計和分析香港學生各年級的幾何認知水平情況。進而探究學生的認知水平是否與個人文化背景（本地學生、跨境學生、非華語學生等）、就讀的學校類型（公立、直資、津貼、國際學校等）及其採用的授課語言（廣東話、普通話、英語等）等因素存在一定關係。另外近年來的大量研究也表明，存在處於「層次零前視覺期」的學生，筆者希望能夠研究他們具體的能力表現，針對性嘗試相應策略來幫助他們盡快步入下一次層次。

筆者將會充分利用是次研究中所收穫的知識、方法和經驗，帶著始終赤誠的初心和熱愛，在數學教育的領域堅定前行。

參考書目：

Burns, M. (2003). Using Games in Your Math Teaching. *Connect Magazine*, 17(2), 1-4.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In Grouws, D. A. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 331-355.

Reys, B. J. (2006). The development and publication of elementary mathematics textbooks: Let the buyer beware! *Phi Delta Kappan*, 87(5), 377-383.

Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008).

The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247-280.

Törnroos, J.(2004). *Mathematics textbooks, opportunity to learn and achievement*.

Meeting of the ICME-10 Discussion Group 14, Copenhagen: Demark.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*.

Orlando, FL: Academic Press.

Wu, D. B., & Ma, H. L. (2006). The distributions of van Hiele levels of geometric

thinking among 1st through 6th graders. In J. Novotná & H. Moraová & M. Krátká

& N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of The 30th Conference Of The*

*International Group For The Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp.

416-429). Prague, Czech Republic: PME.

陳建蒼和柳賢（2005）：數學史融入無窮等比級數教學之探究，《數學與科學教育》，3，頁57-77。

陳清容和呂世虎（2006）：《小學數學新課程教學法》，北京，首都師範大學出版社。

馮振業（2013）：再論數學科全港性系統評估，《數學教育》，35，頁 2-15。

顧明遠(1998)：《教育大辭典》，上海，上海教育出版社。

郭欣（2015）：《小學生對圖形與變換內容理解水平的調查研究》，東北師範大學碩士論文。

黃憐華（2013）：《兩岸三地角概念教科書內容比較之研究》，國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系學位論文。

黃顯華（2005）：香港地區教科書選用制度，載於黃顯華和霍秉坤主編《尋找課程論和教科書設計的理論基礎》，（頁345-357），北京市，人民教育出版社。

何森豪（2001）：van Hiele 幾何發展水準之量化模式——以國小中高年級學生在四邊形概念之表現為例，《測驗統計年刊》，9，頁 81-129。

簡心怡 (2006)：《評分者對數學科創意教學觀點之比較 以「中小學數學教師創意教學競賽」為例》，國立中央大學數學研究所碩士論文

孔凡哲、張怡等 (2007)：《教科書研究方法與質量保障研究》，長春，東北師範大學出版社。

林碧珍 (2003)：生活情境中的數學，《新竹縣教育研究集刊》，3，頁 1-19。

林芳姬和姚如芬 (2005)。積木怎麼不見了～體積空間能力的教學，《科學教育研究與發展季刊》，40，頁 35-47。

林智中 (2008)：香港教科書政策的理念和實踐，《Journal of Textbook Research》，1 (2)，頁 29-44。

劉秘密 (2012)：《上海市小學數學現行教材 (H版) 編選特點研究》，華東師範大學碩士論文。

全國教育科學規劃領導小組辦公室 (2008)：美國、日本、澳門、香港、內地數學課程與教材的比較研究'研究成果述評，《當代教育論壇：學科教育研究/Forum on Contemporary Education》，4，頁 5-7。

任潔 (2010)：讓遊戲走進課堂，《數學學習與研究》，13，頁 120-121。

石鷗 (2007)：最不該忽視的研究——關於教科書研究的幾點思考，《湖南師範大學教育科學學報》，6(5)，頁5-9。

吳德邦、李懿芳和馬秀蘭 (2006)：立體幾何思考層次測驗編製歷程之研究，《數學考卷編製暨評析研討會論文集暨會議實務彙編》，(頁 584-608)，臺中市：國立臺中教育大學。

吳德邦、馬秀蘭和李懿芳(2007)：編製吳－馬－李氏 van Hiele 立體幾何思考層次測驗之歷程，《測驗統計年刊》，15，頁 15-42。

吳德邦和鄭佳昇(2001)：《由表徵觀點初探國小兒童立體幾何概念之研究》，中華民國第十七屆科學教育學術研討會暨第十四屆科學教育學會年會，高雄市國立高雄師範大學。

吳金聰 (2017)：平面幾何，輯於劉曼麗主編《國小數學與其教材之知識補給站》初版，(頁 271-309)，屏東，國立屏東大學。

現代教育研究社有限公司（2017）：《現代教育研究社 2017 年書目表》，頁 24，  
更新日期：20170504，檢自 [http://www.mers.hk/product/download/MERS\\_Product\\_Catalogue\\_HK\\_2017.pdf](http://www.mers.hk/product/download/MERS_Product_Catalogue_HK_2017.pdf)，瀏覽日期 20180405

香港課程發展議會（2000）：《數學課程指引（小一至小六）》，香港，教育署。

香港課程發展議會（2017）：《數學教育學習領域課程指引（小一至中六）》（2017），  
香港，教育署。

香港特別行政區教育局課本發展委員會（2017）：《適用書目表》，更新日期：  
20170417，檢自 <https://cd.edb.gov.hk/rtl/searchlist.asp>，瀏覽日期：20170515

香港特別行政區教育局課本發展委員會（2018a）：《適用書目表：初小中文課本  
及學習材料》，修訂日期：20180403，檢自 <https://cd.edb.gov.hk/rtl/pdf/PR123C20180403.pdf>，瀏覽日期：20180405

香港特別行政區教育局課本發展委員會（2018b）：《適用書目表：高小中文課本  
及學習材料》，修訂日期：20180403，檢自 <https://cd.edb.gov.hk/rtl/pdf/PR456C20>

180403.pdf，瀏覽日期：20180405

香港特別行政區教育局課本發展委員會（2018c）：List of Recommended Junior Primary School Textbooks in English，修訂日期：20180403，檢自 <https://cd.edb.gov.hk/rtl/pdf/PR123E20180403.pdf>，瀏覽日期：20180405

香港特別行政區教育局課本發展委員會（2018d）：List of Recommended Senior Primary School Textbooks in English，修訂日期：20180403，檢自 <https://cd.edb.gov.hk/rtl/pdf/PR456E20180403.pdf>，瀏覽日期：20180405

香港特別行政區立法會（2009）：《香港教育出版商會 中英文教出版事業協會 提供的背景資料（一） 香港教科書出版的現況介紹》，檢自 <http://www.legco.gov.hk/yr08-09/chinese/panels/ed/papers/ed0511cb2-1520-1-c.pdf>，瀏覽日期：20180405

蕭文強（1992）：數學史和數學教育：個人的經驗和看法，《數學傳播》，16（3），頁 23-29。

謝宗穎（2009）：《數學史融入國小數學教學之實驗研究——以「圓」為例》，臺北市立教育大學數學資訊教育學系碩士論文。

徐偉民和林美如（2009）：台灣，中國與香港國小數學教科書幾何教材之內容分析，《彰化師大教育學報》，16，頁47-73。

薛建成（2003）：《依據 van Hiele 幾何思考理論——探究臺灣中部地區國小學童幾何概念發展之研究》，台中師範學院碩士論文。

楊國揚和王立心(2010)：《中國大陸教科書及學術圖書出版制度》，臺北：國立編譯館。

姚雪（2010）：《上海，香港，新加坡高中數學教科書的比較研究》，華東師範大學碩士論文。

游安軍（2005）：數學遊戲與數學教學觀，《湖南教育：綜合版》，9，頁 40-41。

張秀英（2009）：《大陸與香港小學幾何課程比較》，東北師範大學碩士論文。

趙倡（2016）：《大陸和香港小學數學教科書的比較研究》，渤海大學碩士論文。

中華人民共和國教育部（2011）：《教育部關於印發義務教育語文等學科課程標準（2011年版）的通知》，檢自 [http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/201112/t2011228\\_167340.html](http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/201112/t2011228_167340.html)

中華人民共和國教育部（2012）：《義務教育數學課程標準（2011年版）》，北京，北京師範大學出版社。

中華人民共和國教育部辦公廳（2016）：《2016年義務教育教學用書目錄》，教育部辦公廳關於2016年中小學教學用書有關事項的通知，檢自 [http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/moe\\_714/201604/t20160428\\_241261.html](http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/moe_714/201604/t20160428_241261.html)，瀏覽日期：20180405

周淑卿（2008）：豈是「一本」能了——教科書概念的重建，《教科書研究》，1(1)，頁29-47。